

Gruppe **A**

Aufgabe A1 (3 Punkte):

Die Folge $\{a_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ ist durch die Anfangsglieder $a_0 = 6$ und $a_1 = 7$ und die Rekursion

$$a_{k+1} = 1.5a_k + a_{k-1}$$

festgelegt.

- (a) Bestimmen Sie die charakteristische Gleichung der Rekursion und deren Nullstellen.
- (b) Bestimmen Sie die explizite Bildungsvorschrift der Folge und berechnen Sie a_{10} .

Aufgabe A2 (5 Punkte):

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + xy^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy$.

- (a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $f(x, y)$.
- (b) Berechnen Sie alle kritischen Stellen von $f(x, y)$.
- (c) Überprüfen Sie für eine selbstgewählte kritische Stelle die hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum.

Aufgabe A3 (3 Punkte):

Approximieren Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = x \exp(x) - 1$.

- (a) Berechnen Sie zwei Schritte mit dem Bisektionsverfahren und starten Sie mit $[0, 1]$.
- (b) Berechnen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens zum Startwert $x_0 = 0.5$.

Aufgabe A4 (5 Punkte):

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.
- (b) Welchen Rang hat die Matrix A ?
- (c) Für welche Lösung wird $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ minimal?

Aufgabe A5 (4 Punkte):

Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\ & & x_2 & \leq & 12, \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 36 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1, x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max! \end{array}$$

Skizzieren Sie den zulässigen Bereich und geben Sie die optimale Lösung an.