Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften.

Mathias Sawall

Institut für Mathematik, Universität Rostock

WS 2025/2026

Struktur der Lehrveranstaltung

Vorlesungen (21 an der Zahl):

- Di 9.15 - 10.45 (nur an geraden Wochen), Arno-Esch HS II,
- Do 11.15 - 12.45 Audimax.

Übungen:

- Mi 7.30 - 9.00, HS 323, Haus 1, Walther Meißner,
- Fr 7.30 - 9.00, Arno-Esch HS II, Franziska Schulz,
- Fr 13.00 - 15.00, HS 323, Haus 1, Alexander Mill.

Prüfung:

- Klausur, 90 Minuten,
- Hilfsmittel: einfacher Taschenrechner, Tafelwerk, 7 doppelseitig handbeschriebene DIN A4-Blätter,
- Taschenrechner: nicht programmierbar, nicht grafikfähig, keine Matrix- und Vektorrechnungen, keine Lösung linearer Gleichungssysteme, keine Integration und keine Differentiation.

Struktur der Lehrveranstaltung

Bei Fragen:

- mathias.sawall@uni-rostock.de,
- Raum 431, Ulmenstraße 69, Haus 3.

Übungsserien:

- https://www.numerik.mathematik.uni-rostock.de/sawall/,
- z.B. ausgedruckt mitbringen,
- sich auf die Aufgaben vorzubereiten erleichtert die Übung,
- Übungen zu aktuellen Themen, mitunter nicht genug Zeit für alle Übungsaufgaben,
- zusätzliche Übungsaufgaben pro Serie, Lösungen dazu in folgender Woche online.

Web:

- https://www.numerik.mathematik.uni-rostock.de/sawall/
- Übungsaufgaben, Folien und anderes Wichtiges.

Übersicht

Übersicht

Übersicht

Beispiel 1

Ein Startup hat monatliche Kosten in Höhe von $12\,000$€*. Erste zahlende Kunden werden ab Monat 19 erwartet. Die Einnahmen werden zunächst* $3\,000$€*/Monat betragen und anschließend wird von 5% Wachstum pro Monat im Vergleich zum Vormonat ausgegangen.*

1. *Ab welchem Monat übersteigen die Einnahmen die Kosten?*
2. *Ab welchem Monat übersteigen die kummulierten Einnahmen die aufgelaufenen Kosten inklusive Startkapital von* $60\,000$€*?*

Rechnungen (geometrische Reihe, Abschnitt 2.1):

1. Löse

$$12\,000 = 3\,000 \cdot (1+0.05)^{i-19} \quad \Rightarrow \quad i = 47.413 \quad \Rightarrow \quad \text{ab dem 48. Monat.}$$

2. Löse

$$60\,000 + 12\,000 \cdot n = \sum_{i=19}^{n} 3\,000 \cdot (1+0.05)^{i-19} \quad \Rightarrow \quad n = 76.405 \quad \Rightarrow \quad \text{ab dem 77.}$$

Beispiel 1

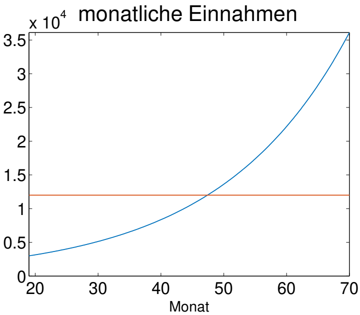
Ein Startup hat monatliche Kosten in Höhe von $12\,000$€. Erste zahlende Kunden werden ab Monat 19 erwartet. Die Einnahmen werden zunächst $3\,000$€/Monat betragen und anschließend wird von 5% Wachstum pro Monat im Vergleich zum Vormonat ausgegangen.

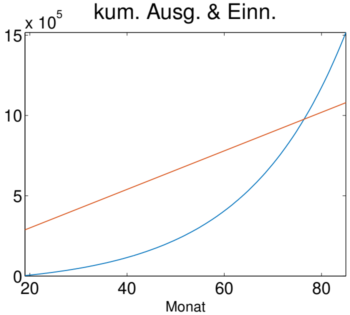
1. *Ab welchem Monat übersteigen die Einnahmen die Kosten?*
2. *Ab welchem Monat übersteigen die kummulierten Einnahmen die aufgelaufenen Kosten inklusive Startkapital von $60\,000$€?*

Rechnungen (geometrische Reihe, Abschnitt 2.1):

1. Löse
$$12\,000 = 3\,000 \cdot (1 + 0.05)^{i-19} \quad \Rightarrow \quad i = 47.413 \quad \Rightarrow \quad \text{ab dem 48. Monat.}$$
2. Löse
$$60\,000 + 12\,000 \cdot n = \sum_{i=19}^{n} 3\,000 \cdot (1 + 0.05)^{i-19} \quad \Rightarrow \quad n = 76.405 \quad \Rightarrow \quad \text{ab dem 77.}$$

Kostenrechnung





Nachhaltigkeit

Beispiel 2

Die Ölreserven belaufen sich aktuell auf 43Mio. t. In diesem Jahr wird mit einem Verbrauch von $a_0 = 2$Mio. t gerechnet. Die Regierung möchte eine jährliche Reduktion des Verbrauchs um 5% umsetzen. Werden die Reserven dann nie ausgehen?

Lösung (geometrische Reihe, Abschnitt 2.1):

- jährliche Reduktion um 5%, also $a_1 = 0.95a_0$, $a_2 = 0.95a_1 = 0.95^2a_0$ oder

$$a_n = 0.95a_{n-1} = 0.95^2a_{n-2} = \cdots = 0.95^n a_0,$$

- summierter Verbrauch bis ins Jahr n (geometrische Reihe)

$$\sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = 2\sum_{i=0}^{n} 0.95^i = 2\frac{1-0.95^{n+1}}{0.05},$$

- Grenzwert der Reihe

$$s = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} q^i = 2\frac{1}{1-0.95} = 2\frac{1}{0.05} = a_0 \cdot 20 = 40,$$

- Reserven (43Mio. t) werden reichen.

Wozu nützt Mathematik

Beispiel 3

Anwendungen zu Ableitungen Die Kosten eines Möbelherstellers $K(x)$ *belaufen sich bei einer Produktionsmenge* x *auf*

$$K(x) = K_v\sqrt{x} + K_f$$

mit den variablen Kosten K_v *und den Fixkosten* K_f. *Damit sind die Grenzkosten*

$$K'(x) = \frac{K_v}{2\sqrt{x}}.$$

Beispiel 4 (Minimale Durchschnittskosten)

Ist die Produktionsmenge zu minimalen Durchschnittskosten gesucht, so ist $\big(K(x)/x\big)' = 0$ *zu lösen. Dies führt auf*

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} = 0$$

und zu lösen ist die (nichtlineare) Gleichung

$$xK'(x) = K(x).$$

Beispiel 5 (Optimaler Preis)

Die Nachfrage eines Gutes verhält sich in Abhängigkeit vom Preis p und dem Preis der Konkurrenz q wie

$$N(p,q) = 100 - \frac{p}{\sqrt{q}}.$$

Bei Produktionskosten von 10 GE und Fixkosten von 12 GE ergibt sich ein Gewinn von

$$G(p,q) = N(p,q) \cdot (p-10) - 12 = (100 + \frac{10}{\sqrt{q}})p - 1012 - \frac{p^2}{\sqrt{q}}.$$

Welcher Preis ist optimal?

Lösung:

- zu lösen ist

$$100 + \frac{10}{\sqrt{q}} - 2\frac{p}{\sqrt{q}} = 0$$

- der optimale Preis liegt bei

$$p^* = 50\sqrt{q} + 5$$

Beispiel 6

Ein Werbeplan soll erstellt werden. Ein Paket von 100 Anzeigenslots auf websites kostet aktuell 1 €und direkt bei social media 2 €. Als Wirkungsfunktion wird

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + x_1x_2$$

angesetzt mit x_1 *Paketen auf websites und* x_2 *Paketen bei social media. Das Budget beträgt* 100*€und die Wirkung soll maximiert werden.*

Lösung (Optimierung unter Nebenbedingungen, Abschnitt 2.6):

- Nebenbedingung ist formal $x_1 + 2x_2 \leq 100,$
  wir wollen maximale Wirkung und nehmen gleich $x_1 + 2x_2 = 100$, also $x_1 = 100 - 2x_2,$
- Extremwertbestimmung

$$\begin{aligned} f(x_2) &= 100 - 2x_2 + 2x_2 + (100 - 2x_2)x_2 \\ &= 100 + 100x_2 - 2x_2^2 \quad \to \quad \max! \\ f' &= 100 - 4x_2 = 0, \end{aligned}$$

- Optimalität also für $x_1 = 50, \quad x_2 = 25,$
- später Optimierung unter Nebenbedingungen mittels Lagrange-Formalismus (Abschnitt 3.6).

Beispiel 6

Ein Werbeplan soll erstellt werden. Ein Paket von 100 Anzeigenslots auf websites kostet aktuell 1 €und direkt bei social media 2 €. Als Wirkungsfunktion wird

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + x_1x_2$$

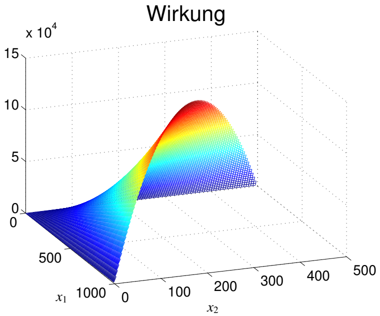
angesetzt mit x_1 *Paketen auf websites und* x_2 *Paketen bei social media. Das Budget beträgt* 100*€und die Wirkung soll maximiert werden.*

Lösung (Optimierung unter Nebenbedingungen, Abschnitt 2.6):

- Nebenbedingung ist formal $x_1 + 2x_2 \leq 100$,
  wir wollen maximale Wirkung und nehmen gleich $x_1 + 2x_2 = 100$, also $x_1 = 100 - 2x_2$,
- Extremwertbestimmung

$$\begin{aligned} f(x_2) &= 100 - 2x_2 + 2x_2 + (100 - 2x_2)x_2 \\ &= 100 + 100x_2 - 2x_2^2 \quad \rightarrow \quad \max! \\ f' &= 100 - 4x_2 = 0, \end{aligned}$$

- Optimalität also für $x_1 = 50, \quad x_2 = 25$,
- später Optimierung unter Nebenbedingungen mittels Lagrange-Formalismus (Abschnitt 3.6).


Wirkung
x 10^4
15
10
5
0
0
500
1000
x_1
0
100
200
300
400
500
x_2

Beispiel 7

Die Domino-Bankengruppe analysiert die Geschäftszahlen der letzten 6 Monate:

$$[225, 230, 230, 200, 160, 110].$$

Berechnen Sie

a) *eine lineare und*

b) *eine quadratische*

Funktion, die die Daten im Sinne der kleinsten Quadrate approximiert!
Bestimmen Sie jeweils den Nulldurchgang!

Lösung (lineare Ausgleichsrechnung, Abschnitt 3.5):

a. Löse

$$\sum_{i=0}^{5}(a + bx_i - y_i)^2 \to \min! \quad \Rightarrow \quad f(x) = 250.7 - 23.29x.$$

b. Löse

$$\sum_{i=0}^{5}(a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2 \to \min! \quad \Rightarrow \quad f(x) = 224.8 + 15.6x - 7.77x^2.$$

Beispiel 7

Die Domino-Bankengruppe analysiert die Geschäftszahlen der letzten 6 Monate:

$$[225, 230, 230, 200, 160, 110].$$

Berechnen Sie

a) *eine lineare und*

b) *eine quadratische*

Funktion, die die Daten im Sinne der kleinsten Quadrate approximiert!
Bestimmen Sie jeweils den Nulldurchgang!

Lösung (lineare Ausgleichsrechnung, Abschnitt 3.5):

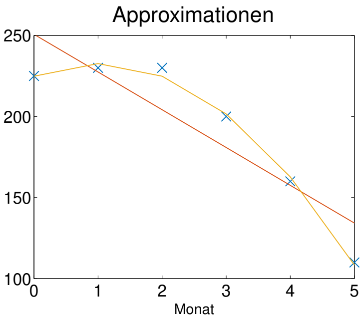
a. Löse

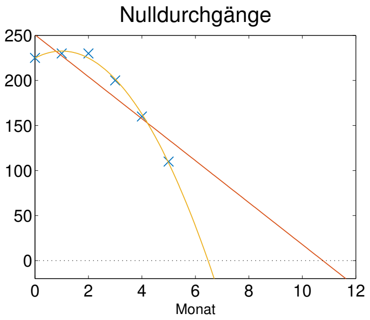
$$\sum_{i=0}^{5}(a + bx_i - y_i)^2 \to \min! \quad \Rightarrow \quad f(x) = 250.7 - 23.29x.$$

b. Löse

$$\sum_{i=0}^{5}(a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2 \to \min! \quad \Rightarrow \quad f(x) = 224.8 + 15.6x - 7.77x^2.$$

Kurvenapproximation





Übersicht

Notation

Summenzeichen:

- Die allgemeine Schreibweise ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

- einfache Beispiele sind

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(siehe Gauß),}$$

$$\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 8 = 36,$$

$$\sum_{i=0}^{5} 3^i = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364,$$

- arithmetisches Mittel der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Produktzeichen:

- Die allgemeine Schreibweise ist

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n,$$

- einfache Beispiele sind

$$\prod_{i=1}^{6} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6! = 720,$$

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{4} (x-i) &= x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x.\end{aligned}$$

Notation

Mathematische Symbolschreibweise:

- Allquantor: $\forall$ – „für alle“,
- Existenzquantor: $\exists$ – „es gibt ein“,
- Verschärfung: $\exists!$ – „es gibt genau ein“,
- Verneinung: $\nexists$ – „es gibt kein“,
- Elementzeichen: $\in$ – „enthalten in“.

Beispiele:

- $n^2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\exists n \in \mathbb{N}\colon \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$
- $n + 1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\exists! n \in \mathbb{N}\colon n - 1 \notin \mathbb{N}$
- $\nexists x \in \mathbb{R}\colon x^2 < 0$
- $\exists x \in \mathbb{Q}\colon \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$

Anderes Beispiel:

- $\forall$ Personen x in diesem Raum gilt:
  $\exists!$ (biologische) Mutter & $\exists!$ (biologischen) Vater von x.

Definition 1.1

Ein Polynom (auch Polynomfunktion oder ganzrationale Funktion) hat die Form

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i. \end{aligned}$$

Die einzelnen $a_i x^i$ werden Monome genannt.

Bemerkungen:

- Grad: höchste Potenz n mit $a_n \neq 0$,
- Polynom n-ten Grades besitzt genau n (reelle oder komplexe) Nullstellen,
- Zerlegung in Linearfaktoren ist

$$f(x) = a_n (x - x_1)^{\lambda_1} (x - x_2)^{\lambda_2} \cdots (x - x_r)^{\lambda_r}.$$

Zerlegung in Linearfaktoren:

- $p(x)$ Polynom mit r Nullstellen $x_1, \ldots, x_r$ und Vielfachheiten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$
- Zerlegung von $p(x)$ mittels der Nullstellen in Linearfaktoren

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{\lambda_1} (x - x_2)^{\lambda_2} \cdots (x - x_r)^{\lambda_r}.$$

Beispiel zur Zerlegung in Linearfaktoren:

- Polynom

$$p(x) = x^6 + 15x^5 + 72x^4 + 82x^3 - 195x^2 - 225x + 250,$$

- Nullstellen (nicht unbedingt offensichtlich)

$$x_1 = -5 \text{ (dreifache Nst.)}, \; x_2 = -2, \; x_3 = 1 \text{ (zweifache Nst.)},$$

- somit zu $x_1 = -5, \; x_2 = -2, \; x_3 = 1$, mit Vielfachheiten $\lambda_1 = 3, \; \lambda_2 = 1, \; \lambda_3 = 2$

$$x^6 + 15x^5 + 72x^4 + 82x^3 - 195x^2 - 225x + 250 = (x + 5)^3 (x + 2)(x - 1)^2.$$

Definition 1.2

Eine rationale Funktion ist der Quotient aus zwei Polynomfunktionen

$$q(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_m x^m} = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$$

Besondere Stellen:

- Sind $g(x_0) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$, so ist x_0 eine Nullstelle.
- Sind $g(x_0) \neq 0$ und $h(x_0) = 0$, so ist x_0 eine Polstelle.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } m > n, \\ a_n/b_m, & \text{falls } m = n, \\ \pm\infty, & \text{falls } m < n. \end{cases}$$

Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen:

Sinus $y = \sin x$
DB = $\mathbb{R}$
WB = $[-1, 1]$
Nullstellen $x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus $y = \arcsin x$
DB = $[-1, 1]$
WB = $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
Nullstelle $x_0 = 0$

Kosinus $y = \cos x$
DB = $\mathbb{R}$
WB = $[-1, 1]$
Nullstellen $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Arkuskosinus $y = \arccos x$
DB = $[-1, 1]$
WB = $[0, \pi]$
Nullstelle $x_0 = 1$

Bekannt sein sollten:

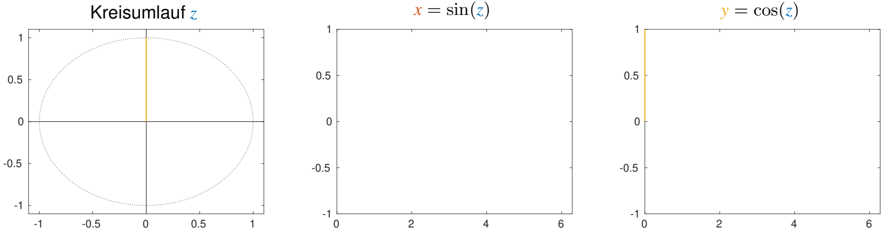
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$
$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \cos(-x) = \cos(x).$$

Definition von Sinus- und Kosinusfunktion

Definition von $\sin x$ und $\cos x$:

- Kreis mit Radius $r = 1$ in der (x, y)-Ebene,
- Punkt wird auf dem Rad entlang geführt, Start bei $(x, y) = (0, 1)$,
- zurückgelegte Wegstrecke z (Bogenmaß) ist Argument (die Variable), dazu

$$x = \sin(z), \qquad y = \cos(z).$$



Argument trigonometrischer Funktionen:

- Verwendung des Bogenmaßes (also π) im wissenschaftlichen Bereich (etwa Studium) und nicht $^\circ$,
- Taschenrechnereinstellung „rad“ anstatt „deg“.

Umrechnung:

- Winkel α in $^\circ$ entspricht dem Anteil $\alpha/360^\circ$ eines vollen Umlaufs,
- voller Umlauf=Umfang=$2\pi r = 2\pi$,
- anteilig $\alpha/360^\circ$ abgelaufen, mittels Dreisatz ergibt sich Bogenmaß z als

$$\alpha \cdot \frac{1}{360^\circ} \cdot (2\pi) = z, \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\alpha}{180^\circ}\pi.$$

Definition 1.3

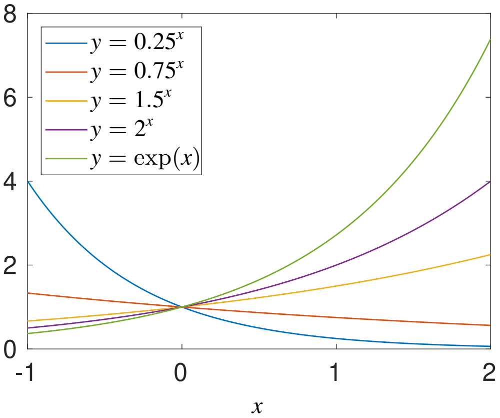
Zur Basis a mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$ ist $f(x) = a^x$ die Exponentialfunktion.

Es gelten:

- DB = $\mathbb{R}$,
- WB = $(0, +\infty)$,
- keine Nullstellen,
- Gemeinsamer Punkt $(0, 1)$,
- streng monoton wachsend für $a > 1$, streng monoton fallend für $0 < a < 1$,
- Spezialfall $\mathrm{e}^x = \exp(x)$ mit $\mathbf{e} \approx 2.718$,
- Rechenregeln

$$a^x a^y = a^{x+y},$$
$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Exponentialfunktionen



Beispiel 8

Wird das Anfangskapital K_0 zum Zinssatz p angelegt (Zinseszinsrechnung), so ergeben sich

$$\begin{aligned} K_1 &= (1+p)^1 K_0, \\ K_2 &= (1+p)^1 K_1 = (1+p)^2 K_0, \\ K_3 &= (1+p)^3 K_0, \\ &\vdots \\ K_n &= (1+p)^n K_0 \end{aligned}$$

Wird dies zu einer kontinuierlichen Funktion erweitert (also auch zwischen den Zinsfristen weitergerechnet), so ergibt sich die Exponentialfunktion

$$K(x) = (1+p)^x K_0.$$

Umkehr der Exponentialfunktion a^x:
Argument und Funktionswert tauschen, zu gegebenem x soll $x = a^y$ erfüllt sein.

Definition 1.4

Die Logarithmusfunktion zur Basis a (wieder mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$) ist definiert als

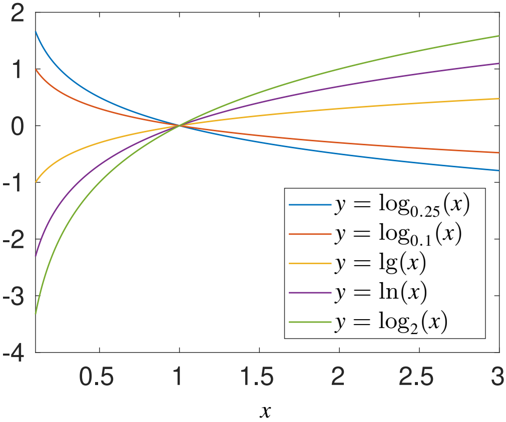
$$y = f(x) = \log_a(x),$$

wobei y zu gegebenen x die Gleichung $x = a^y$ erfüllt. Es ist also $x = a^{\log_a(x)}$.

Es gelten:

- DB = $(0, +\infty)$,
- WB = $\mathbb{R}$,
- Nullstelle $x_0 = 1$,
- Gemeinsamer Punkt $(1, 0)$,
- Spezialfälle $\ln x = \log_e x \qquad \lg x = \log_{10} x$.

Logarithmen



Logarithmengesetze: $(a, b, c > 0)$

$$\log_a a = 1, \qquad \log 1 = 0,$$

$$\log(ab) = \log a + \log b, \qquad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b,$$

$$\log a^n = n \log a, \qquad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a,$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, \qquad \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Beispiel 9

Der Energieverbrauch einer Gemeinde verringert sich jedes Jahr um 7%.

Nach wieviel Jahren hat sich der Verbrauch auf 40% des Ursprungswertes reduziert?

Die Entwicklung des Gegenwertes von Waren verhält sich also wie

$$E_{n+1} = (1 - 0.07)E_n = 0.93 \cdot E_n = 0.93^{n+1} \cdot E_0.$$

Die zu lösende Gleichung ist

$$\begin{aligned}
&0.93^n \cdot E_0 = 0.4 \cdot E_0 = 0.4 \cdot E_0 \\
&0.93^n = 0.4 \\
&\lg\left(0.93^n\right) = \lg(0.4) \\
&n \lg(0.93) = \lg(0.4) \\
&n = \frac{\lg(0.4)}{\lg(0.93)} \approx 12.63.
\end{aligned}$$

Die Verwendung eines anderen Logarithmus, z.B. $\ln(x)$*, führt auf dasselbe Ergebnis.*

Übersicht

Zahlenbereiche

Definition 1.5 (Bekannte Zahlenmengen)

Bezeichnung	*Formelzeichen*	*Beispiele*
natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	*0, 1, 2, ...*
ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	*0, -1, 1, -2, 2 ...*
rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	*7/13, -1.8*
reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	π, $\mathrm{e} = \exp(1)$

Bemerkung:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Unterschied zwischen rationalen und reellen Zahlen:

- reelle Zahlen haben keine Periode bei den Ziffern/Nachkommastellen,
- hat also eine Zahl in ihrer Darstellung mit Komma eine Periode, so gehört sie zu $\mathbb{Q}$

$$0.3333\ldots = 0.\overline{3} = \frac{1}{3}, \qquad 0.07692307692\ldots = 0.\overline{076923} = \frac{1}{13}.$$

Mächtigkeiten von Mengen:

- leere Menge, Formelzeichen $\emptyset$,
- endliche nichtleere Mengen,
- abzählbar unendliche Mengen,
- überabzählbar unendliche Mengen,
- zwei unendliche Mengen heißen gleichmächtig, wenn sie entweder beide abzählbar oder beide überabzählbar. sind.

Beispiele:

- $\mathbb{N}$ ist abzählbar (logisch),
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar $(0, 1, -1, 2, -1, 3, -3, \dots)$,
- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar (Cantorsches Diagonalverfahren, nächste Folie),
- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ (Cantorsches Diagonalverfahren):

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
 & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \cdots \\
\hline
1 & \frac{1}{1}\ (\text{Nr. }1) & \rightarrow & \frac{1}{2}\ (\text{Nr. }2) & & \frac{1}{3}\ (\text{Nr. }5) & \rightarrow & \frac{1}{4}\ (\text{Nr. }6) & & \frac{1}{5}\ (\text{Nr. }11) & \rightarrow \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
2 & \frac{2}{1}\ (\text{Nr. }3) & & \frac{2}{2}\ (\%) & & \frac{2}{3}\ (7) & & \frac{2}{4}\ (\%) & & \frac{2}{5} & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
3 & \frac{3}{1}\ (\text{Nr. }4) & & \frac{3}{2}\ (\text{Nr. }8) & & \frac{3}{3}\ (\%) & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
4 & \frac{4}{1}\ (\text{Nr. }9) & \rightarrow & \frac{4}{2}\ (\%) & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \\
 & \downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
5 & \frac{5}{1}\ (\text{Nr. }10) & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Paare, n–Tupel und Matrizen

Definition 1.6

Seien A und B beliebige Mengen mit $a \in A$ und $b \in B$. Es wird (a, b) ein geordnetes Paar genannt. Weiter heißen a und b die Elemente oder Komponenten des geordneten Paares (a, b).

Unterschied zu Mengen:

- bei Mengen haben die Elemente keine Reihenfolge,
- hier werden die beiden Elemente der Mengen aufgezählt und zusätzlich definiert, welches der erste Partner innerhalb des Paares sein soll.

Definition 1.7

Für $n = 2$: Seien A und B beliebige Mengen. Die Menge

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$$

aller geordneten Paare (a, b) von Elementen a aus A und b aus B heißt kartesisches Produkt der Mengen A und B.

Erweiterung zu mehrfaches kartesisches Produkt analog.

Übersicht

Übersicht

Definition 2.1

Eine Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Die Werte a_n der Zahlenfolge werden Glieder genannt.

Anwendungen von Folgen:

- Ableitungen und Integrale werden auf Folgen und deren Grenzwerte zurückgeführt,
- in Wirtschaftswissenschaften u.A. zur Modellierung und Analyse der Entwicklung von Preisen, Werten, Größe von Interessengruppen, Bevölkerungszahlen usw..

Beispiel 10

1. *Einfache Folgen*

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2n+3 \quad \to \quad a_0=3,\ a_1=5,\ a_2=7,\ a_3=9,\dots \\
b_n &= 3^n \quad \to \quad b_0=1,\ b_1=3,\ b_2=9,\ b_3=27,\dots \\
c_n &= c_{n-1}+c_{n-2},\ c_0=c_1=1 \\
&\qquad\qquad \to \quad c_2=2,\ c_3=3,\ c_4=5,\ c_5=8,\dots
\end{aligned}
$$

2. *Kapitalentwicklung bei jährlichen Erträgen von* 5%

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 10\,000 \\
a_1 &= 10\,000 + 10\,000\cdot 0.05 = 1.05\cdot 10\,000 = 10\,500 \\
a_2 &= 10\,500 + 10\,500\cdot 0.05 = 1.05\cdot 10\,500 = 1.05^2\cdot 10\,000, \\
&\ \vdots \\
a_{n+1} &= \underbrace{a_n}_{\text{aktueller Wert}} + \underbrace{0.05\cdot a_n}_{\text{Ertrag}} = 1.05\cdot a_n \\
a_{n+1} &= 1.05^2 a_{n-1} = 1.05^3 = \cdots = 1.05^{n+1} a_0.
\end{aligned}
$$

Unterscheidung nach Art der Bildungsvorschrift

Explizite Folge:

- Glieder werden direkt mittels einer Funktion

$$a_n = f(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

  berechnet,
- z.B. $a_n = 2n + 3$.

Rekursive Folge:

- Anfangsglieder vorgegeben $a_1, \ldots, a_m$,
- weitere Glieder werden mittels einer Bildungsvorschrift

$$a_n = f(n, a_{n-1}, \ldots, a_0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

  unter Verwendung vorheriger Glieder bestimmt,
- z.B. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ sowie $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Spezielle Typen von Folgen

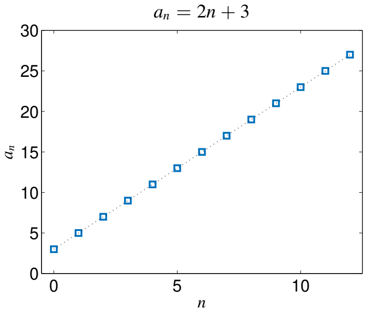
Arithmetische Folgen:

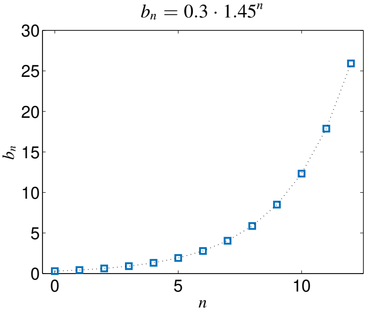
- Glieder unterscheiden sich um konst. Differenz d,
- rekursive Bildungsvorschrift $a_{n+1} = a_n + d$,
- explizite Bildungsvorschrift $a_{n+1} = a_0 + nd$,
- fallend für $d < 0$, konstant für $d = 0$, wachsend für $d > 0$.

Geometrische Folgen:

- Glieder unterscheiden sich um konstanten Quotienten q,
- rekursive Bildungsvorschrift $a_{n+1} = a_n q$,
- explizite Bildungsvorschrift $a_{n+1} = a_0 q^{n+1}$,
- alternierend für $q < 0$, fallend für $0 < q < 1$, konstant für $q = 1$, wachsend für $q > 1$

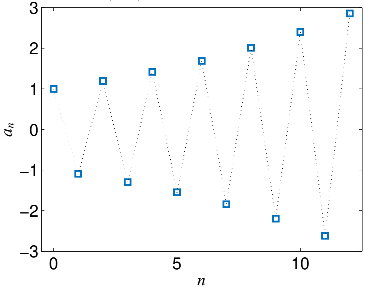
Arithmetisch/geometrisch:



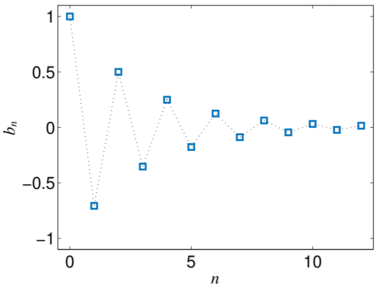


Weitere geometrische Folgen ($q < 0$):

$a_n = (-1)^n 1.3^{n/3}$, also $q = -\sqrt[3]{1.3}$



$b_n = (-1)^n 2^{-n/2}$, also $q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



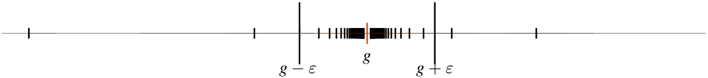
Definition 2.2

Eine Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *konvergiert gegen den* *__Grenzwert__*

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

wenn es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass für alle* $n \geq n_0$ *gilt:*

$$|g - a_n| < \varepsilon.$$



Anders ausgedrückt ist eine Folge $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ genau dann gegen g konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ fast alle ihre Glieder a_n (d.h. alle außer endlich viele) in dem offenen Intervall $(g-\varepsilon,\ g+\varepsilon)$ liegen.

Nullfolge:

- Eine Folge $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$, für die $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt.

Beispiel (ausnahmsweise direkte Anwendung Grenzwertdefinition):

- $a_n = 1/n$, (mit $n \geq 1$) ist eine Nullfolge,
- zu $\varepsilon > 0$ wird die Forderung

$$|0 - a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = n^{-1} < \varepsilon$$

  erreicht mit

$$n > \varepsilon^{-1},$$

- also ab $n_0 = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil + 1$, mit $\lceil \cdot \rceil$ dem Aufrunden auf die nächstgrößere ganze Zahl, gilt $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Beispiel:

- für die Folge

$$b_n = \frac{2n}{n+1}$$

  gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$,

- denn für $\varepsilon > 0$ soll gelten

$$\begin{aligned} \left|2 - \frac{2n}{n+1}\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad 2 - \frac{2n}{n+1} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad 2n + 2 - 2n < \varepsilon(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} - 1 < n, \end{aligned}$$

- somit liegen für $n_0 = 2/\varepsilon$ sicher alle Folgenglieder mit alle $n \geq n_0$ dichter als $\varepsilon > 0$ an $g = 2$.

Konvergenz von Folgen

Definition 2.3

Eine Folge $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ die nicht konvergiert wird divergent genannt.

Drei Typen von Divergenz:

- *bestimmt divergent gegen ∞, falls es zu jedem $M > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass*

$$a_n > M \quad \forall n \geq n_0,$$

- *bestimmt divergent gegen $-\infty$, falls es zu jedem $M > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass*

$$a_n < -M \quad \forall n \geq n_0,$$

- *andernfalls unbestimmt divergent.*

Grenzwertbestimmung mittels bekannter Grenzwerte als „Grundbausteine“ und Grenzwertsätzen.

Satz 2.4 (Grenzwertsätze)

Seien $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ *und* $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Es gelten:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad (b_n \neq 0,\ b \neq 0)$$

Spezielle Grenzwerte (Grundbausteine):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \mathrm{e}^p.$$

Beispiel 11

Bestimmung von

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - n + 1}{7n^4 + \sqrt{n} + 1}$$

mittels Grenzwertsätze

$$\begin{aligned} g &= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - n + 1}{7n^4 + \sqrt{n} + 1} \cdot \frac{n^{-3}}{n^{-3}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5 - n^{-2} + n^{-3}}{7n + n^{-5/2} + n^{-3}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 5 - n^{-2} + n^{-3}}{\lim_{n\to\infty} 7n + n^{-5/2} + n^{-3}} \\ &= \frac{5 - 0 + 0}{\infty + 0 + 0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Konvergenz von Folgen

Verhalten der geometischen Folge $a_n = q^n$:

- Konvergenz für $|q| \leq 1$, es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1, \\ 1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

- bestimmte Divergenz für $q > 1$, es gilt $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$,
- unbestimmte Divergenz für $q \leq -1$.

Konstruktion rekursiver Folgen:

- Folgenglieder $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ ergeben sich durch Festlegen der Anfangsglieder $a_0, \ldots, a_{m_0}$ und Angabe einer Vorschrift, wie sich aus den Vorgängern die Nachfolger bestimmen

$$a_n = f(n, a_{n-1}, \ldots, a_0), \qquad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots.$$

Einfache Beispiele:

- Fakultäten

$$a_0 = 1, \quad a_n = n \cdot a_{n-1}, \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

- Sparplan

$$a_0 = 1000, \quad a_n = 1.008 a_{n-1} + 600, \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

- Fibonacci-Zahlen

$$a_1 = 1, \ a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Rekursive Folgen

Konstruktion rekursiver Folgen:

- Folgenglieder $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ ergeben sich durch Festlegen der Anfangsglieder $a_0, \dots, a_{m_0}$ und Angabe einer Vorschrift, wie sich aus den Vorgängern die Nachfolger bestimmen

$$a_n = f(n, a_{n-1}, \dots, a_0), \qquad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots .$$

Einfache Beispiele:

- Fakultäten

$$a_0 = 1, \quad a_n = n \cdot a_{n-1},\ n = 1, 2, 3, \dots ,$$

- Sparplan

$$a_0 = 1000, \quad a_n = 1.008 a_{n-1} + 600,\ n = 1, 2, 3, \dots ,$$

- Fibonacci-Zahlen

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad n = 2, 3, 4, \dots .$$

Rekursive Folgen

Nachteil rekursiver Folgen:

- alle vorherigen Glieder müssen zur Berechnung von a_n bekannt sein,
- explizite Vorschrift wird i.d.R. bevorzugt,
- Umwandlung von rekursiv in explizit möglich, sofern rekursive Bildungsvorschrift linear mit konstanten Koeffizienten.

Fibonacci-Zahlen:

- Anfangsglieder $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, Bildungsvorschrift

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

- $a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5, \dots,\ a_{10} = 55$ (noch einfach),
- $a_{40} = 102\,334\,155$ (Programmieren oder wunde Finger)
- Umwandeln in explizite Formel lohnt sich!

Fibonacci-Zahlen

Beispiel 12 (Fibonacci-Zahlen)

Umwandeln von $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ *zu* $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ *in explizite Bildungsvorschrift.*

Lösung (Teil I):

- *geometrischer Ansatz* $\quad a_n = z^n,$
- *Einsetzen in die Rekursionsformel führt auf*

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad &\Leftrightarrow \quad z^{n+1} - z^n - z^{n-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z^{n-1}(z^2 - z - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 - z - 1 = 0, \end{aligned}$$

- *Lösungen der linearen Differenzengleichung* $z^2 - z - 1 = 0$ *sind*

$$z_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{5}/2, \quad z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{5}/2,$$

- *Bildungsvorschrift hat die Form*

$$a_n = cz_1^n + dz_2^n,$$

Fibonacci-Zahlen

Beispiel 12 (Fibonacci-Zahlen)

Umwandeln von $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ zu $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ in explizite Bildungsvorschrift.

Lösung (Teil II):

- *Bestimmung von c und d mittels der Startwerte $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$*

$$a_n = cz_1^n + dz_2^n$$

- *lineares Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} a_1 &= cz_1^1 + dz_2^1 & \rightarrow \quad & 1 = c(\frac{1}{2} + \sqrt{5}/2) + d(\frac{1}{2} - \sqrt{5}/2), \\ a_2 &= cz_1^2 + dz_2^2 & \rightarrow \quad & 1 = c(\frac{1}{2} + \sqrt{5}/2)^2 + d(\frac{1}{2} - \sqrt{5}/2)^2 \end{aligned}$$

führt auf $c = \sqrt{5}/5, \quad d = -\sqrt{5}/5,$

- *explizite Bildungsvorschrift lautet*

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Bemerkungen:

- die Gleichung

$$z^2 - z - 1 = 0$$

  wird auch charakteristische Gleichung genannt,
- nach demselben Prinzip wird bei allen linearen Differenzengleichungen vorgegangen,
- Prinzip wird auch angewendet, wenn eine inhomogene Differenzengleichungen vorliegt (siehe später),
- Ordnung der charakteristischen Gleichung = Rekursionstiefe,
- Rekursionstiefe = Anzahl gegebene Startwerte.

Fibonacci-Zahlen

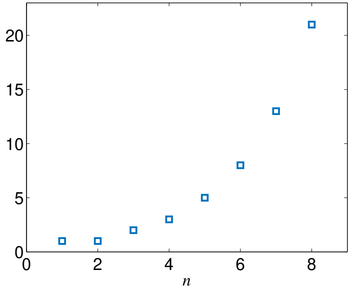
Allgemeines Vorgehen (homogene Differenzengleichung):

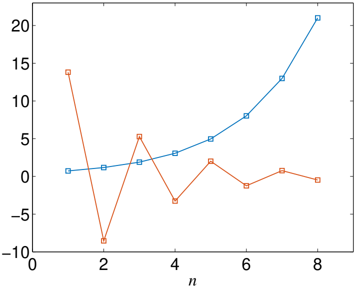
$$a_{n+k} = \alpha_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 a_n \qquad \text{(Rekursionstiefe } k\text{)}$$
$$a_1,\ a_2, \ldots, a_k \qquad \text{(Anfangswerte)}$$

1. Bestimmen der charakteristischen Gleichung
$$\lambda^k - \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} - \alpha_0 = 0,$$
2. Berechnen der Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$
$$a_n = c_1\lambda_1^n + \ldots + c_k\lambda_k^n,$$
3. Berechnen der Koeffizienten $c_1, \ldots, c_k$ mittels der Anfangswerte.

<u>Graphische Darstellung</u>

- links: die ersten 8 Fibonacci-Zahlen,
- rechts: beide Summanden einzeln geplottet, der zweite 50-fach überhöht.

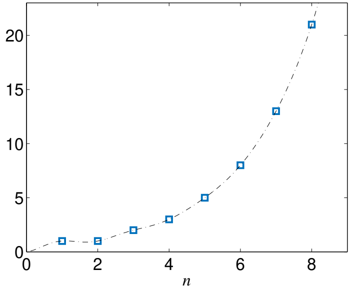


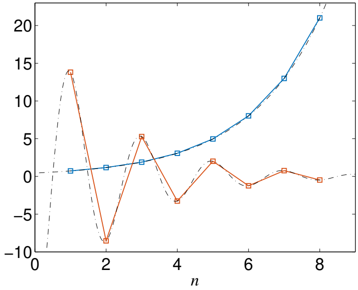


Graphische Darstellung

- links: die ersten 8 Fibonacci-Zahlen,
- rechts: beide Summanden einzeln geplottet, der zweite 50-fach überhöht.
- zusätzlicher plot des Realteils zu

$$f(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x.$$





Tabellenkalkulation zur Rekursion

$$a_{n+1} = ka_n + la_{n-1}, \qquad a_1 = 1, \quad a_2 = 1.$$

E11 | =$C$5*C11+$C$6*D11

	A	B	C	D	E
1		**Rekursion**			
2		a(n+1)=k*a(n)+l*a(n-1)			
3					
4		**Parameter**			
5		k	1		
6		l	1		
7					
8		**Modellierung**			
9		n	a(n)	a(n-1)	a(n+1)
10		1	1		
11		2	1	1	2
12		3	2	1	3
13		4	3	2	5
14		5	5	3	8
15		6	8	5	13
16		7	13	8	21
17		8	21	13	34

Umwandlung für inhomogene Differenzengleichungen 1. Ordnung

Inhomogene Differenzengleichungen:

$$\underbrace{a_{n+1} = a_n}_{\text{homog. Diffgl. 1. Ord.}} \quad \underbrace{+p(n)}_{\text{inhomog. Teil}} \quad .$$

Umwandlung in explizite Form:

- zunächst allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung

$$\bar{a}_n \qquad \text{löst} \qquad a_{n+1} = a_n,$$

- Berechnung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung ($p(n)$ sei Polynom vom Grad q)

$$\hat{a}_n = b_0 + b_1 n + \ldots b_k n^q,$$

- allgemeine Lösung hat die Form

$$a_n = \bar{a}_n + \hat{a}_n,$$

- bestimmen der Koeffizienten in $\bar{a}_n$.

Aufgabe 20080725A4.

Beim monatlichen Härtetest nehmen regelmäßig 200 neue Kandidaten teil. Es bestehen 40% auf Anhieb. Von den Kandidaten, die durchfallen, geben 50% auf, die anderen treten zum nächsten Termin erneut an.

Stellen Sie eine Rekursionsvorschrift für die Anzahl a_k der Teilnehmer beim k-ten Test auf.

Geben Sie die Teilnehmerzahlen a_k für $k = 1, \ldots 5$ und die Zahl der erfolgreichen Kandidaten für den Zeitraum bis $k = 5$ an. (Hinweis: Beim ersten Test gibt es keine Wiederholungskandidaten.)

Berechnen Sie den Grenzwert von a_k für $k \to \infty$, sofern die Folge konvergiert.

Aufgabe 20080725A4.

Beim monatlichen Härtetest nehmen regelmäßig 200 neue Kandidaten teil. Es bestehen 40% auf Anhieb. Von den Kandidaten, die durchfallen, geben 50% auf, die anderen treten zum nächsten Termin erneut an.

Stellen Sie eine Rekursionsvorschrift für die Anzahl a_k der Teilnehmer beim k-ten Test auf.

Geben Sie die Teilnehmerzahlen a_k für $k = 1, \dots 5$ und die Zahl der erfolgreichen Kandidaten für den Zeitraum bis $k = 5$ an. (Hinweis: Beim ersten Test gibt es keine Wiederholungskandidaten.)

Berechnen Sie den Grenzwert von a_k für $k \to \infty$, sofern die Folge konvergiert.

Lösung (I):

- Rekursionsvorschrift

$$a_n = 0.3a_{n-1} + 200$$

  (hier eine inhomogene Differenzengleichung),
- Startwert $a_1 = 200$,
- einfaches Einsetzen führt auf

$$a_2 = 260,\ a_3 = 278,\ a_4 = 283.4,\ a_5 = 285.02,$$

- erfolgreiche Kandidaten

$$b_1 = 80,\ b_2 = 104,\ b_3 = 111.2,\ b_4 = 113.36,\ b_5 = 114.01.$$

Aufgabe 20080725A4.

Beim monatlichen Härtetest nehmen regelmäßig 200 neue Kandidaten teil. Es bestehen 40% auf Anhieb. Von den Kandidaten, die durchfallen, geben 50% auf, die anderen treten zum nächsten Termin erneut an.

Stellen Sie eine Rekursionsvorschrift für die Anzahl a_k der Teilnehmer beim k-ten Test auf.

Geben Sie die Teilnehmerzahlen a_k für $k = 1, \ldots 5$ und die Zahl der erfolgreichen Kandidaten für den Zeitraum bis $k = 5$ an. (Hinweis: Beim ersten Test gibt es keine Wiederholungskandidaten.)

Berechnen Sie den Grenzwert von a_k für $k \to \infty$, sofern die Folge konvergiert.

Lösung (II):

- Rekursionsvorschrift (inhomogene Differenzengleichung)

$$a_n = 0.3a_{n-1} + 200,$$

- zunächst nur homogene Differenzengleichung betrachten

$$a_n = z^n \Rightarrow z^n = 0.3z^{n-1} \Rightarrow z = 0.3,$$

- Lösung der inhomogenen Diff.-gl. hat die Form $a_n = c0.3^n + d$,
- Anfangswerte $a_1 = 200$, $a_2 = 260$ führen auf

$$a_n = -\frac{2000}{7}0.3^n + \frac{2000}{7},$$

- somit $a_3 = 278$, $a_4 = 283.4$, $a_5 = 285.02$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2000}{7} = 285.71$.

Cobweb-Modell:

- ökonomisches Modell zur Einstellung des Marktgleichgewichts eines Gutes für diskrete Zeitintervalle,
- Simulation wirtschaftlicher Schwankungen aufgrund zeitlicher Verzögerungen zw. Preisbildung und Anpassung von Produktionsmengen,
- Preisberechnung zu diskreten Zeitpunkten (z.B. stets montags oder stets 9 Uhr),
- cobweb, dt. Spinnennetz.

Cobweb-Modell:

- n-tes Handelsintervall, alter Preis p_{n-1},
- erzeugte neue Angebotsmenge ($a > 0$)

$$A(p_{n-1}) = ap_{n-1} + b,$$

- Nachfragemenge abhängig vom neuen (noch zu bestimmenden) Preis p_n

$$N(p_n) = -cp_n + d.$$

Cobweb-Modell:

- unabhängiges Marktgleichgewicht

$$A(p^*) = N(p^*) \quad \text{also} \quad ap^* + b = -cp^* + d,$$

- Gleichgewichtspreis

$$p^* = \frac{d-b}{a+c},$$

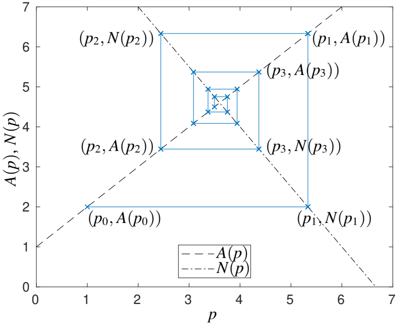
- Gleichgewichtsmenge

$$A(p^*) = N(p^*) = \frac{ad+bc}{a+c},$$

- inwiefern Preis $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und Produktionsmenge gegen Gleichgewichtswerte konvergieren, hängt von a, b, c, d ab.

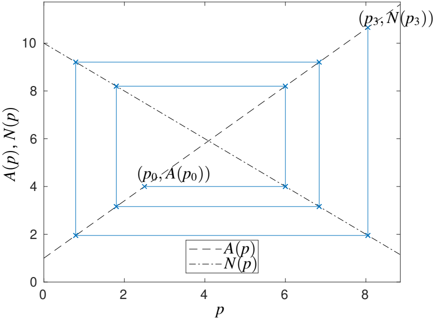
Cobweb-Modell:

- Parameterwahl $a = 1$, $b = 1$, $c = 1.5$, $d = 10$,
- gedämpftes Verhalten: Konvergenz gegen Gleichgewichtspreis und -menge $p^* = 3.6$, $A(p^*) = N(p^*) = 4.6$.



Cobweb-Modell:

- Parameterwahl $a = 1.2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 10$, Startpreis $p_0 = 2.5$,
- Aufschaukelndes Verhalten, keine Konvergenz.



Cobweb-Modell:

- spinnennetzartige Spirale in graphischer Darstellung $\rightarrow$ cobweb,
- explizite Bildungsvorschrift

$$p_n = \left(p_0 + \frac{b-d}{a+c}\right)\left(-\frac{a}{c}\right)^n - \frac{b-d}{a+c}.$$

- Parameter a und c geben an, wie sensitiv Angebot und Nachfrage reagieren,
- Konvergenz für $a < c$, Divergenz für $a > c$,
- für

$$|-a/c| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a < c$$

  reagieren die Kunden stärker als Produzenten

  $\Rightarrow$ stabile Entwicklung,
- für

$$|-a/c| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a > c$$

  reagieren die Produzenten über

  $\Rightarrow$ sich verstärkende Spirale/Instabilität.

Analyse der Iteration:

- Folge von Produktionsmengen

$$x_0 \text{ wählen,} \quad x_{n+1} = -\frac{a}{c}x_n + \frac{ad}{c} + b \quad \to \quad x_{n+1} = \alpha + \beta x_n,$$

- $|\beta| < 1 \Rightarrow$ Konvergenz gegen Fixpunkt

$$x^* = \alpha + \beta x^* = \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{(ad+bc)}{a+c},$$

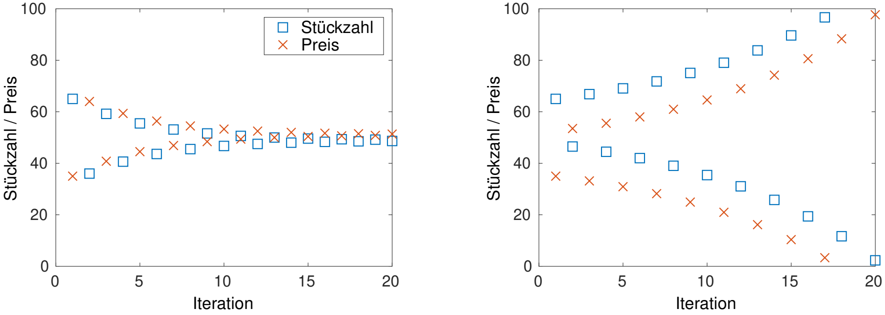
  $x^* =$ Gleichgewichtsmenge $\to$ Gleichgewichtspreis $p^* = \frac{d-x^*}{c}$

- $|\beta| > 1 \Rightarrow$ Instabilität, Abweichungen vom Gleichgewicht wachsen geometrisch an.

Interpretation:

- $|\beta| < 1 \Leftrightarrow a < c$ Kunden reagieren stärker als Produzenten $\to$ stabil,
- $|\beta| > 1 \Leftrightarrow a > c$ Produzenten überreagieren $\to$ instabil.

Modellierungen zu zwei Parametersätzen:



Zweistufige Rückkopplung

Modell - Jemand hat Schwierigkeiten, mit Geld umzugehen:

- Guthaben an Silvester $K_0 = -10\,000€$,
- Guthaben Ende Januar $K_1 = -11\,000€$,
- Sparen ist der Vorsatz, Schuld folgt der Vorschrift

$$K_{n+1} = k^* + a \cdot (K_n - k^*) + b \cdot (K_n - K_{n-1})$$

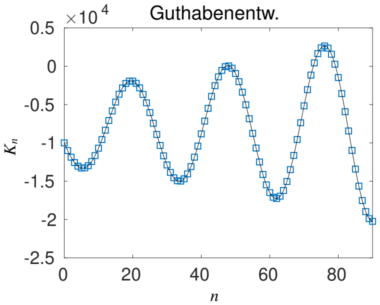
  mit angestrebter akzeptabler Schuld k^* sowie individuellen Steuerparametern a, b um auf Abweichungen von der angestrebten akzeptablen Schuld bzw. auf Sparerfolge zu reagieren,
- Bildungsvorschrift für $k^* = -8\,000$, $a = 0.95$, $b = 1.02$ ist

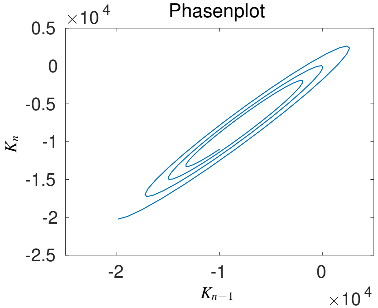
$$K_{n+1} = 1.97K_n - 1.02K_{n-1} + 400.$$

- explizite Bildungsvorschrift wäre

$$K_n = -(10^3 + 2308.35\mathbf{i})(0.985 - 0.223\mathbf{i})^n - (10^3 - 2308.35\mathbf{i})(0.985 + 0.223\mathbf{i})^n - 8\,000.$$

Plots für $k^* = 8\,000$, $a = 0.95$, $b = 1.02$:





Bemerkungen:

- typischer Jojo-Effekt erkennbar,
- keine Stabilisierung um k^* (Schulden schaukeln sich auf),
- Stabilisierung z. B. für $a = 0.95$, $b = -0.92$,
- Analogie: Anlegerverhalten, Aktienkurse, etc..

Definition 2.5

Zu einer Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ definieren die Glieder

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

die zugehörige n-te Partialsumme. Die Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen bezeichnet die unendliche Reihe.

Satz 2.6

Für die geometrische Reihe mit $a_0 = 1$ (normierter Fall) lässt sich die n-te Partialsumme berechnen als

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis mittels vollständiger Induktion.

Reihen

Definition 2.5

Zu einer Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *definieren die Glieder*

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

die zugehörige ***n-te Partialsumme****. Die Folge* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *der Partialsummen bezeichnet die unendliche Reihe.*

Satz 2.6

Für die geometrische Reihe mit $a_0 = 1$ *(normierter Fall) lässt sich die* n*-te Partialsumme berechnen als*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis mittels vollständiger Induktion.

Idee der vollständigen Induktion:

- Nachweis, dass eine Gleichung/Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist,
- z.B. explizite Formel zur Berechnung der Glieder einer Reihe,
- Induktionsanfang, nachrechnen, dass $f(0) = s_0$,
- Induktionsschritt $(n \to n+1)$, umformen

$$\begin{aligned} f(n+1) = s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \\ &= f(n) + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Warum funktioniert das?

- Es gilt am Anfang $(n = 0)$
- wegen Induktionsschritt gilt es dann auch für $n = 1$,
- induktiv weiter so und es gilt für $n = 2, 3, 4, \ldots$,
- induzieren – erzeugen.

Vollständige Induktion zum Beweis von

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Induktionsanfang: für $n = 0$ ist

$$s_0 = \sum_{i=0}^{0} q^0 = 1 = \frac{1 - q^1}{1 - q}.$$

Induktionsschritt: für $n \to n + 1$ ist

$$\begin{aligned} s_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} q^i &= q^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} q^i \\ &= q^{n+1} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{q^{n+1} - q^{n+2} + 1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Definition 2.7

Der <u>Grenzwert einer Reihe</u>, falls er denn existiert, wird mit

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n$$

bezeichnet.

<u>Arithmetische Reihe</u>:

- $s_n = \sum_{i=0}^{n}(a_0 + (i-1)d) = a_0(n+1) + d\sum_{i=0}^{n} i$,
- divergiert, außer für $a_1 = d = 0$.

Geometrische Reihe:

- $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = a_0 \sum_{i=0}^{n} q^i$,
- Konvergenz für $|q| < 1$

$$s = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} q^i = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}.$$

- Divergenz für $|q| > 1$ und $a_0 \neq 0$.

Beispiele für geometrische Reihen:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \frac{81}{256} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4.$$

Beispiel 13

Erzreserven bei Reduktion der Fördermenge:

- *Reserve in Höhe von* 43*Mio. t, aktuelle Fördermenge* $a_0 = 2$*Mio. t,*
- *jährliche Reduktion der Fördermenge um* 5%*, also* $a_1 = 0.95a_0$, $a_2 = 0.95a_1 = 0.95^2 a_0$ *oder*

$$a_n = 0.95a_{n-1} = 0.95^2 a_{n-2} = \cdots = 0.95^n a_0,$$

- *summierter Verbrauch bis ins Jahr* n

$$\sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = 2 \sum_{i=0}^{n} 0.95^i = 2 \frac{1 - 0.95^{n+1}}{0.05},$$

- *Grenzwert der Reihe*

$$s = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} q^i = 2 \frac{1}{1 - 0.95} = 2 \frac{1}{0.05} = a_0 \cdot 20 = 40,$$

- *Reserven (43Mio. t) werden reichen.*

Konvergenz von Reihen:

- Analyse der Konvergenz von Reihe mitunter schwierig,
- triviales notwendiges Konvergenzkriterium: zugrunde liegende Folge ist Nullfolge.

Bsp.: Divergenz der harmonischen Reihe:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{S_0} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{S_2} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}}_{S_3} + \ldots,$$

- jeweils $S_i \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad$ Divergenz

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} S_k \geq 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty,$$

- siehe etwa *O. Forster: Analysis 1, Vieweg* für Konvergenzkriterien.

Definition 2.8

Sei $\{s_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *die Reihe zu der Folge* $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$. *Weiter sei* $\{t_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *die Reihe zu der Folge* $\{b_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *und es gelte* $b_n \geq 0 \quad \forall n$.

Die Reihe $\{t_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *wird* ***Majorante*** *zu* $\{s_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *genannt, falls sie konvergiert und* $|a_n| \leq b_n \quad \forall n$ *gilt.*

Die Reihe $\{t_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *wird* ***Minorante*** *zu* $\{s_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *genannt, falls sie divergiert und* $|a_n| \geq b_n \quad \forall n$ *gilt.*

Majorantenkriterium:

- konvergiert die Majorante $\{t_n\}_{n=0,1,2,\dots}$, so konvergiert auch $\{s_n\}_{n=0,1,2,\dots}$,
- Abschätzung von oben.

Minorantenkriterium:

- divergiert die Minorante $\{t_n\}_{n=0,1,2,\dots}$, so divergiert auch $\{s_n\}_{n=0,1,2,\dots}$,
- Abschätzung von unten.

Beispiele:

- die Reihe
$$t_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \qquad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \frac{1}{1-1/2} = 2$$
ist eine Majorante zur Reihe
$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2+i)^i},$$
$\Rightarrow$ auch $\{s_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ konvergiert,
- die Reihe
$$t_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \qquad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$$
ist für $x > 0$ eine Minorante zur Reihe
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1+1/i}{i},$$
$\Rightarrow$ auch $\{s_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ divergiert.

Beispiele:

- die Reihe
$$t_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \qquad \text{mit} \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \frac{1}{1-1/2} = 2$$
ist eine Majorante zur Reihe
$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2+i)^i},$$
$\Rightarrow$ auch $\{s_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ konvergiert,
- die Reihe
$$t_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \qquad \text{mit} \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$$
ist für $x > 0$ eine Minorante zur Reihe
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1+1/i}{i},$$
$\Rightarrow$ auch $\{s_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ divergiert.

Zinseszins

<u>Anwendung Zinseszinsformel</u>:

- beschreibt den Zusammenhang von

K_0	Anfangskapital
K_n	Endkapital
n	Anzahl der Zeitintervalle
p	Zinssatz (pro Zeitintervall)
E	Einzahlung (pro Zeitintervall)

- es gilt

$$K_n = K_0(1+p)^n + E\frac{(1+p)^n - 1}{p}.$$

Zinseszins

Herleitung der Zinsenszinsformel:

- Anfangskapitals wird n-mal verzinst $\rightarrow$ erster Summand $K_0(1+p)^n$,
- erste Einzahlung wird $n-1$-mal verzinst $\rightarrow$ Beitrag $E(1+p)^{n-1}$,
- zweite Einzahlung wird $n-2$-mal verzinst $\rightarrow$ Beitrag $E(1+p)^{n-2}$,
- allgemein ergibt sich

$$\begin{aligned} K_n &= K_0(1+p)^n + E(1+p)^{n-1} + E(1+p)^{n-2} + \cdots + E(1+p)^0 \\ &= K_0(1+p)^n + \underbrace{E\sum_{i=0}^{n-1}(1+p)^i}_{\text{Summenformel anwenden}}, \end{aligned}$$

- Summenformel für geometrische Reihe

$$E\sum_{i=0}^{n-1}(1+p)^i = E\frac{1-(1+p)^n}{1-(1+p)} = E\frac{(1+p)^n-1}{p}$$

- also

$$K_n = K_0(1+p)^n + E\frac{(1+p)^n-1}{p}.$$

Auflösung nach den eingehenden Größen:

- Anfangskapital
$$K_0 = \frac{pK_n - E((1+p)^n - 1)}{p(1+p)^n},$$
- Einzahlung
$$E = \frac{p(K_n - K_0(1+p)^n)}{(1+p)^n - 1},$$
- Zeitindex
$$n = \frac{\ln|pK_n + E| - \ln|pK_0 + E|}{\ln(1+p)},$$
- Zinssatz (nur für $E = 0$)
$$p = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1.$$

Aufgabe 20110805A3.
Andrea jr. stellt fest, dass seine Schulden in Euro (bis auf wenige Cent) identisch mit seiner Matrikelnummer sind. Er rechnet aus, dass er bei konstanten monatlichen Zahlungen von 15000 Euro und einem Zinssatz von 0.6% pro Monat in genau 33 Jahren schuldenfrei ist.
Wie lautet seine Matrikelnummer?

Aufgabe 20110805A3.

Andrea jr. stellt fest, dass seine Schulden in Euro (bis auf wenige Cent) identisch mit seiner Matrikelnummer sind. Er rechnet aus, dass er bei konstanten monatlichen Zahlungen von 15000 Euro und einem Zinssatz von 0.6% pro Monat in genau 33 Jahren schuldenfrei ist.
Wie lautet seine Matrikelnummer?

Gesucht:

- K_0

Gegeben:

- $E = 15\,000$, $p = 0.006$, $n = 33 \cdot 12 = 396$

Rechnung:

$$K_0 = \frac{pK_n - E((1+p)^n - 1)}{p(1+p)^n} = -2.266041061 \cdot 10^6$$

Matrikel-Nr.: 2266041.

Beispiele zu Zinseszins

Christian braucht Geld und nimmt einen Kredit in Höhe von $600\,000$ € zu einem monatlichen Zinssatz von 0.3% auf.

(a) Wie hoch muss die monatliche Rate sein, wenn der Kredit in 25 Jahren zurückbezahlt sein soll?

(b) Christian stellt fest, dass er monatlich nur $2\,500$ € zurück zahlen kann. Wie lange dauert es, bis der Kredit getilgt ist?

(c) Wie hoch ist in beiden Fällen die Gesamteinzahlung?

Christian braucht Geld und nimmt einen Kredit in Höhe von $600\,000$ € zu einem monatlichen Zinssatz von 0.3% auf.

(a) Wie hoch muss die monatliche Rate sein, wenn der Kredit in 25 Jahren zurückbezahlt sein soll?

(b) Christian stellt fest, dass er monatlich nur $2\,500$ € zurück zahlen kann. Wie lange dauert es, bis der Kredit getilgt ist?

(c) Wie hoch ist in beiden Fällen die Gesamteinzahlung?

Rechnung für a):

- Gesucht: E,
- Gegeben:$K_0 = 600\,000$, $n = 25 \cdot 12 = 300$, $p = 0.003$ und $K_n = 0$
- also

$$E = \frac{p(K_n - K_0(1+p)^n)}{(1+p)^n - 1} = -3036.02$$

Beispiele zu Zinseszins

Christian braucht Geld und nimmt einen Kredit in Höhe von $600\,000$ € zu einem monatlichen Zinssatz von 0.3% auf.

(a) Wie hoch muss die monatliche Rate sein, wenn der Kredit in 25 Jahren zurückbezahlt sein soll?

(b) Christian stellt fest, dass er monatlich nur $2\,500$ € zurück zahlen kann. Wie lange dauert es, bis der Kredit getilgt ist?

(c) Wie hoch ist in beiden Fällen die Gesamteinzahlung?

Rechnung für b):

- nun sind die Parameter $K_0 = 600\,000$, $E = -2500$, $p = 0.003$ und $K_n = 0$
- damit ergibt sich

$$n = \frac{\ln|pK_n + E| - \ln|pK_0 + E|}{\ln(1+p)} = 424.96.$$

- die Gesamteinzahlungen sind $300 \cdot 3036.02 = 910\,806$ und $1\,062\,400$.

Zinseszins

Zinsumrechnung für versch. Intervalleinheiten - effektiver Zins:

- Tilgung mittels monatlicher Einzahlung, Zinssatz aufs Jahr bezogen,
- Zinssatz einfach durch 12 teilen ist nicht korrekt, denn

$$K_0 \left(1 + \frac{p}{12}\right)^{12} > K_0(1+p),$$

- effektiven Zinssatz

$$P = \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{m} - 1,$$

  mit m der Anzahl der Teilintervalle des Zinssatzes,
- für $m = 12$ und $p = 0.02$ ergibt sich z.B. $P = 0.020184$, also 2.018%.