

3. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Aufgabe 8:

Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wird mittels der Rekursion

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$$

und den Anfangswerten $a_1 = 2$, $a_2 = 10$ definiert.

Bestimmen Sie zu der Rekursion die charakteristische Gleichung, lösen Sie diese, geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift für a_n an und berechnen Sie a_{20} .

Aufgabe 9:

Bei einer halbjährigen Aufnahmeprüfung nehmen neben den jeweils 300 neuen Kandidaten erfahrungsgemäß 30% der Teilnehmer vom letzten Mal sowie 12% der Kandidaten vom vorletzten Mal teil. Beim ersten Test gibt es keine Wiederholer, beim zweiten nur einfache Wiederholer.

Bestimmen Sie die Rekursionsvorschrift. Berechnen Sie zudem den Grenzwert der Folge indem Sie die stabile Anzahl der Teilnehmer (Fixpunkt) berechnen.

Aufgabe 10:

In der Vorlesung wurde mittels Parametern $a, b, c, d > 0$ und der Folge

$$x_{n+1} = c + \frac{ad}{b} - \frac{d}{b}x_n = \alpha + \beta x_n$$

mit x_n der Produktionsmenge in Zyklus n ein Marktmodell vereinfacht modelliert.

Unter welchen Bedingungen an den Parameter β ergibt sich eine stabile Entwicklung? Nutzen Sie dazu die Gleichgewichtsmenge $x^* = \alpha/(1 - \beta)$ und betrachten Sie $|x_n - x^*|$, also die Abweichung der Iterierten x_n vom Gleichgewicht. Leiten Sie unter Verwendung auf $|x_n - x^*|$ eine Formel für $|x_{n+1} - x^*|$ her.

Zusatzaufgabe 2:

Erstellen Sie eine Tabellenkalkulation zu der rekursiven Folge aus Aufgabe 8 und vergleichen Sie die Werte für a_{20} .

Aufgaben zum Selbststudium & zusätzlichen Üben zur 3. Übung

Übungsaufgabe 7:

Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wird mittels der Rekursion

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$$

und den Anfangswerten $a_0 = 1, a_1 = 1$ definiert.

Bestimmen Sie zu der Rekursion die charakteristische Gleichung, lösen Sie diese, geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift für a_n an und berechnen Sie a_{50} .

Übungsaufgabe 8:

Britta legt Geld an. Die Bank bietet ihr 3% Zinsen für das aktuelle Kapital sowie einen Bonus von 5% auf das Kapital vom vorangegangenen Jahr. Den Bonus gibt es im ersten Jahr natürlich noch nicht.

Stellen Sie eine rekursive Formel für Brittas Kapital a_n im Jahr n auf. Wieviel hat sie nach 5 Jahren, wenn Sie mit $a_0 = 10\,000$ € startet?

Übungsaufgabe 9:

Der Materialverbrauch einer Firma sinkt seit Jahren. Der Verbrauch eines Jahres setzt sich jeweils wie folgt zusammen: Für die immer weiter optimierte Produktion fallen stets nur noch 90% des Materialverbrauchs vom Vorjahr an. Die Entwicklungsabteilung verbraucht aber auch etwas und so kommen noch 3% des Materialverbrauchs von vor zwei Jahren hinzu.

- (a) Stellen Sie eine Rekursion zur Bestimmung des Materialverbrauchs v_k im Jahr k auf.
- (b) Berechnen Sie ausgehend von $v_{2020} = 38$ und $v_{2021} = 34.2$ den Wert v_{2023} .
- (c) Geben Sie die charakteristische Gleichung der Rekursion an.

Übungsaufgabe 10:

Geben Sie für folgenden Reihen die Grenzwerte für $n \rightarrow \infty$ an, falls sie existieren

$$(a) \quad s_n = \sum_{i=0}^n 0.1^i, \qquad (b) \quad s_n = \sum_{i=0}^n 1.5^i.$$

Zusatzaufgabe 3:

Erstellen Sie eine Tabellenkalkulation zum Modell der zweistufigen Rückkopplung (Cobweb-Modell)

$$K_{n+1} = k^* + a \cdot (K_n - k^*) + b \cdot (K_n - K_{n-1})$$

mit den Anfangswerten $K_0 = -10\,000$ und $K_1 = -11\,000$ sowie den Parametern $k^* = -8\,000$, $a = 0.95$, $b = 1.02$. Berechnen Sie die Werte K_n für $n = 2, \dots, 90$.