Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 14.01.2026

12. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Aufgabe 42:
Ben plant die Grundflächen der Küche, des Wohnzimmers und des Esszimmers für sein neues Haus. Folgendes ist zu berücksichtigen: Das Wohnzimmer soll so groß sein wie Küche und Esszimmer zusammen. Das Esszimmer soll $\alpha = 5\,\mathrm{m}^2$ größer sein als die Küche. Wenn er das Esszimmer um 30% vergrößern würde, wäre es zusammen mit Küche $\beta = 6\,\mathrm{m}^2$ größer als das Wohnzimmer.

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die drei Raumgrößen auf und bestimmen Sie diese.

(b) Geben Sie eine LR-Zerlegung der zugrundeliegenden Matrix an.

(c) Wie lauten die Maße der Räume, für $\alpha = 8\,\mathrm{m}^2$ und $\beta = 6.3\,\mathrm{m}^2$?

Aufgabe 43:
Die Rohstoffe A, B werden zu Produkten C, D verarbeitet. Zur Herstellung von 1 Einheit C werden 2 Einheiten A und 1 Einheit B gebraucht, zur Herstellung von einer Einheit D sind 3 Einheiten A und 4 Einheiten B nötig.

(a) Bestimmen Sie $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass Sie einen Zusammenhang zwischen den Einheiten der Rohstoffe und der Produkte der folgenden Form erhalten

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_C \\ x_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie M^{-1}.

(c) Wieviele Einheiten der Produkte lassen sich aus $x_A = 23$ und $x_B = 24B$ herstellen, wenn alles verbraucht werden soll?

Aufgabe 44:

(a) Bestimmen Sie jeweils den Rang der folgenden Matrizen

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche der folgenden Mengen sind die Vektoren linear unabhängig

$$\text{(i)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{(ii)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{(iii)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}?$$

(c) Generieren die Vektoren aus (b) den $\mathbb{R}^2$ bzw. den $\mathbb{R}^3$?

(d) Sind die Mengen aus (b) Basen des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$?

Die Aufgaben sollen sowohl zur Bearbeitung in den Seminaren als auch zur selbstständigen Übung dienen. Insbesondere reichen die 90 Minuten einer Übung oft nicht zur Besprechung und Bearbeitung aller Aufgaben.

Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 14.01.2026

Aufgaben zum Selbststudium & zusätzlichen Üben zur 12. Übung

Übungsaufgabe 42:

Jemand will etwas Geld in Aktien, Gold und Rentenfonds anlegen. Es werden $\alpha = 1000$ € mehr in Aktien als in die beiden anderen Investments zusammen investiert. Wenn die Investments in Gold und Rentenfonds jeweils verdoppelt werden, so sollen es zusammen immer noch $\beta = 500$ € weniger sein, als in Aktien. Gold ist tendenziell out und soll nur 5% des Investments ausmachen.

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Höhen der Investments auf und bestimmen Sie diese sowie die Höhe der gesamten Geldanlage.

(b) Geben Sie eine LR-Zerlegung der zugrundeliegenden Matrix an.

(c) Wie lauten die Werte der Investments, für $\alpha = 3\,000$ € und $\beta = 750$ €?

Übungsaufgabe 43:

Die Rohstoffe U, V werden zu Produkten X, Y verarbeitet. Zur Herstellung von 1 Einheit X werden 2.5 Einheiten U und 2.5 Einheiten V gebraucht, zur Herstellung von einer Einheit Y sind 1 Einheit U und 3 Einheiten V nötig.

(a) Bestimmen Sie $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass Sie einen Zusammenhang zwischen den Einheiten der Rohstoffe und der Produkte der folgenden Form erhalten

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_X \\ x_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_U \\ x_V \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie M^{-1}.

(c) Wieviele Einheiten der Produkte lassen sich aus $x_U = 8$ und $x_V = 14$ herstellen, wenn alles verbraucht werden soll?

Übungsaufgabe 44:

(a) Bestimmen Sie jeweils den Rang der folgenden Matrizen

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche der folgenden Mengen sind die Vektoren linear unabhängig

$$\text{(i)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{(ii)} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{(iii)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}?$$

(c) Generieren die Vektoren aus (b) den $\mathbb{R}^2$ bzw. den $\mathbb{R}^3$?

(d) Sind die Mengen aus (b) Basen des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$?