Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 02.11.2025

3. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 7:

Wir betrachten die Rekursion $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$. Der geometrische Ansatz $a_n = z^n$ führt auf (Einsetzen von $a_n = z^n$ in die Rekursionsvorschrift)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1} &= 0 \\ z^{n+1} - z^n - 2z^{n-1} &= 0 \\ z^{n-1}(z^2 - z - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist $z^2 - z - 2 = 0$ die charakteristische Gleichung. Deren Lösungen sind

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}, \qquad z_1 = 2, \quad z_2 = -1.$$

Unabhängig von den Anfangsgliedern ist die explizite Bildungsvorschrift somit von der Form

$$a_n = c \cdot 2^n + d \cdot (-1)^n.$$

Die Wahl $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$ führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 = c \cdot 2^0 + d \cdot (-1)^0 \qquad &\Rightarrow \qquad c + d &= 1, \\ a_1 &= 1 = c \cdot (2)^1 + d \cdot (-1)^1 \qquad &\Rightarrow \qquad 2c - d &= 1. \end{aligned}$$

Addition beider Gleichungen ergibt

$$3c = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{3}.$$

Die explizite Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$$

und es ist $a_{50} = 750\,599\,937\,895\,083$.

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 8:

Sei a_n das Kapital im n-ten Intervall. Als Zugewinne für das nächste Intervall ergeben sich ein Ertrag von 3% für das aktuelle Kapital, also $0.03 \cdot a_n$, sowie ein Ertrag von 5% auf das Kapital vom vorangegangenen Jahr, also $0.05 \cdot a_{n-1}$

Das neues Kapital ist

$$a_{n+1} = a_n + 0.03 \cdot a_n + 0.05 \cdot a_{n-1} = 1.03a_n + 0.05a_{n-1}.$$

Dies ist die rekursive Bildungsvorschrift. Daraus ergeben sich folgende Glieder

$$\begin{aligned} a_0 &= 10\,000 \\ a_1 &= 1.03a_0 = 10\,300 \qquad \text{(hier gibt's den 2. Bonus noch nicht)}, \\ a_2 &= 1.03a_1 + 0.05a_0 = 10\,609 + 500 = 11\,109, \\ a_3 &= 1.03a_2 + 0.05a_1 = 11\,442 + 515 = 11\,957, \\ a_4 &= 1.03a_3 + 0.05a_2 = 12\,316 + 555 = 12\,871, \\ a_5 &= 1.03a_4 + 0.05a_3 = 13\,257 + 598 = 13\,855. \end{aligned}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 9:

(a) Für den Materialverbrauch v_k im Jahre k ergibt sich folgende Rekursion

$$v_{k+1} = 0.9v_k + 0.03v_{k-1}.$$

(b) Zu den Anfangswerten $v_{2020} = 38$ und $v_{2021} = 34.2$ ergeben sich in den Folgejahren

$$\begin{aligned} v_{2022} &= 31.92, \\ v_{2023} &= 29.75. \end{aligned}$$

(c) Die charakteristische Gleichung der Rekursion ergibt sich mittels des Ansatzes (siehe Fibonacci) $v_k = \lambda^k$

$$\begin{aligned} &v_{k+1} = 0.9v_k - 0.03v_{k-1}, \\ &\lambda^{k+1} - 0.9\lambda^k - 0.03\lambda^{k-1} = 0, \\ &\lambda^2 - 0.9\lambda - 0.03 = 0. \end{aligned}$$