Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 10.11.2025

4. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 10:

Allgemein konvergiert eine geometrische Reihe $s_n = a_0 \sum_{i=0}^{n} q^i$ genau dann, wenn $|q| < 1$. Der Grenzwert ist $a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$. Für die Folgen ist zu analysieren, ob $|q| < 1$ gilt und ggf. der Grenzwert zu bestimmen.

$$\text{(a)} \quad \sum_{i=0}^{n} 0.1^i \quad \Rightarrow \quad q = 0.1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} 0.1^n = \frac{1}{1-0.1} = \frac{1}{0.9} = 1.111,$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{i=0}^{n} 1.5^i \quad \Rightarrow \quad q = 1.5 \quad \Rightarrow \quad \text{die Reihe divergiert.}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 11:

Siehe Aufgabe 11:

$$\text{(a)} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3,$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{i=10}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^i - \sum_{i=0}^{9} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 3 - \frac{1-(2/3)^{10}}{\frac{1}{3}} = 3 \cdot (2/3)^{10} = \frac{2^9}{3^{10}} = 0.052025,$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{i=0}^{\infty} 1.5^i = \infty,$$

$$\text{(d)} \quad \sum_{i=0}^{\infty} (-0.7)^i = \frac{1}{1+0.7} = 0.5882,$$

alternative Lösung für (d) durch Aufteilen der Summe in negativen und positiven Anteil

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} (-0.7)^i &= 1 - \underbrace{0.7}_{0.7\cdot 1} + \underbrace{0.7^2}_{0.49} - \underbrace{0.7^3}_{0.7\cdot 0.49} + \underbrace{0.7^4}_{0.49^2} - \underbrace{0.7^5}_{0.7\cdot 0.49^2} \pm \ldots \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} 0.49^i\right) - 0.7 \left(\sum_{i=0}^{\infty} 0.49^i\right) = 0.3 \sum_{i=0}^{\infty} 0.49^i = \frac{0.3}{0.51} = 0.5882.\end{aligned}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 12:

(a) Induktionsanfang:

$$n = 1: \qquad \sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1 = 1^2 \qquad \checkmark$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right) + 2(n+1) - 1\\ &= n^2 + 2(n+1) - 1\\ &= n^2 + 2n + 1\\ &= (n+1)^2 \quad \checkmark\end{aligned}$$

(b) Induktionsanfang:

$$n = 1: \qquad 1^2 + 1 = 2 \quad \text{ist gerade} \qquad \checkmark$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = \underbrace{(n^2+n)}_{\text{gerade}} + \underbrace{2(n+1)}_{\text{gerade}} \quad \checkmark$$

(der erste Summand ist dabei nach Induktionsvoraussetzung (für n) gerade).

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 13:

Gegeben für (a):

$$K_0 = -500\,000, \quad E = 3\,000, \quad K_n = 0, \quad p = 0.0015.$$

Lösung für (a):

$$\begin{aligned} n &= \frac{\ln|pK_n + E| - \ln|pK_0 + E|}{\ln(1+p)}\\ &= \frac{\ln|0.0015 \cdot 0 + 3\,000| - \ln|0.0015 \cdot (-500\,000) + 3\,000|}{\ln(1.0015)}\\ &= 191.93,\\ GE &= 191.93 \cdot 1\,200 = 575\,790.\end{aligned}$$

Gegeben für (b):

$$K_0 = -500\,000, \quad n = 12 \cdot 12 = 144, \quad K_n = 0, \quad p = 0.0022.$$

Lösung für (b):

$$\begin{aligned} E &= \frac{p(K_n - K_0(1+p)^n)}{(1+p)^n - 1}\\ &= \frac{0.0022 \cdot (0 + 500\,000 \cdot 1.0022^{144})}{1.0022^{144} - 1}\\ &= 4\,055.00\\ GE &= 144 \cdot 4\,055.00 = 583\,920.\end{aligned}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 14:

(a) Gegeben: $K_0 = 500\,000$, $K_n = 0$, $p = 0.005$, $n = 240$.

$$E = \frac{p(K_n - K_0(1+p)^n)}{(1+p)^n - 1} = \frac{0.005 \cdot (0 - 500\,000 \cdot 1.005^{240})}{1.005^{240} - 1} = -3582.2.$$

(b) Gegeben: $K_0 = -500\,000,\ K_n = 0,\ p = 0.0005,\ E = 3\,000.$
(Wegen $E > 0$ ist $K_0 < 0$ zu wÃ¤hlen, andernfalls geht auch $E = -3\,000$ und $K_0 = 500\,000$)

$$n = \frac{\ln|pK_n + E| - \ln|pK_0 + E|}{\ln(1+p)} = \frac{\ln|0.0005 \cdot 0 + 3\,000| - \ln|0.0005 \cdot (-500\,000) + 3\,000|}{\ln(1.0005)}$$
$$= 174.07.$$