Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 17.11.2025

5. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 15:

(a) $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 5, \qquad f''(x) = 12x^2 + 12x + 6,$

(b) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{12}{x^5}, \qquad f''(x) = \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{24}{x^5} + \dfrac{60}{x^6},$

(c) $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} + \exp(x), \qquad f''(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2} + \exp(x),$

(d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}(x^3 + x - 1) + \ln(x)(3x^2 + 1),$

(e) $f'(x) = -\dfrac{1}{3}\sin(x)\sin(2x) + \dfrac{2}{3}\cos(x)\cos(2x),$

(f) $f'(x) = \dfrac{-3}{2 - 3x},$

(g) $f'(x) = 3\cos(3x),$

(h) $f'(x) = 3(1 + \tan^2(3x)) = \dfrac{3}{\cos^2(3x)}.$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 16:

(a) $f(x) = (x^3 - x^2 + x - 1)^4, \qquad f'(x) = 4 \cdot (x^3 - x^2 + x - 1)^3 \cdot (3x^2 - 2x + 1),$

(b) $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \qquad f'(x) = \dfrac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}},$

(c) $f(x) = (x^2 - x + 1)^{-1}, \qquad f'(x) = -(x^2 - x + 1)^{-2} \cdot (2x - 1),$

(d) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}, \qquad f'(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x),$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 17:

Wir betrachten

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

Die Ableitungen sind

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1, \qquad f''(x) = 6x - 6, \qquad f'''(x) = 6.$$

(a) DB=$\mathbb{R}$. Nullstellen: mittels Ausprobieren lässt sich etwa $x_1 = 1$ ermitteln. Polynomdivision führt auf

$$(x^3 - 3x^2 \quad -x + 3) : (x - 1) = x^2 - 2x - 3 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3).$$

Damit lassen sich die beiden weiteren Nullstellen

$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = 1 \pm 2$$

als $x_2 = 3$, $x_3 = -1$ bestimmen.

(b) da $f(x)$ ein Polynom 3. Grades ist und der Koeffizient vor x^3 eins ist, sind

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

(c) Extremstellen: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 0$ lässt sich zu $x^2 - 2x - 1/3 = 0$ umformen und es ergeben sich die kritischen Stellen

$$x_{4,5} = 1 \pm \sqrt{1 + 1/3}, \qquad x_4 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 2.155,\ x_5 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx -0.155.$$

Einsetzen in $f''(x)$ ergibt

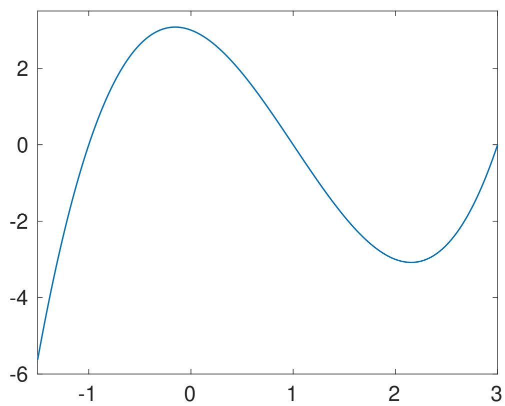
$$f''(x_4) \approx 6.93, \qquad f''(x_5) \approx -6.93.$$

Somit ist $(2.155, -3.079)$ ein Minimum und $(-0.155, 3.079)$ ist ein Maximum.

Wendestellen: Nullstelle von $f''(x) = 6x - 6$ ist $x_6 = 1$. Wegen $f'''(1) = 6$ ist $(1, 0)$ ein Wendepunkt und es ist der einzige.

(d) Monotonieverhalten: Mittels Verhalten gegen unendlich und den Extremstellen lässt sich schließen, dass $f(x)$ für $x \in (-\infty, x_4]$ und für $x \in [x_3, \infty)$ monoton steigend ist und für $x \in [x_4, x_3]$ monoton fallend.

Grafische Darstellung:



Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 18:

Das Volumen ist auf 10 l festgelegt, also $V = A \cdot h = \pi r^2 h = 10$, eine Größe legt die andere fest und Umstellen ergibt $h = 10/\pi/r^2$. Materialverbrauch: Mantel (Umfang·Höhe) $2\pi r \cdot h$ und Boden πr^2

Optimierungsfunktion:

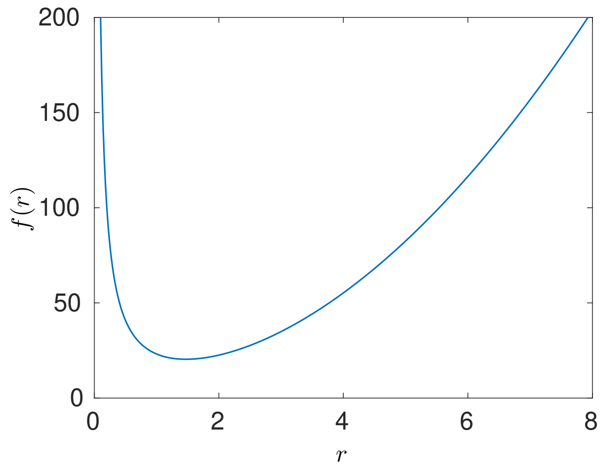
$$2\pi r \cdot h + \pi r^2 = \pi r(2h + r)$$

Ersetzen von h führt auf

$$f(r) = \pi r \left(\frac{20}{\pi r^2} + r \right) = \frac{20}{r} + \pi r^2.$$

Ableitungen:

$$f'(r) = -\frac{20}{r^2} + 2\pi r, \qquad f''(r) = \frac{40}{r^3} + 2\pi$$



Null setzen:

$$f'(r) = -\frac{20}{r^2} + 2\pi r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi r = \frac{20}{r^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}, \qquad r = 1.471.$$

Die zugehörige Höhe ist $h = 1.471$. Einsetzen in die zweite Ableitung führt auf $f''(1.471) > 0$, sodass es sich um ein Minimum handelt. Die Einheit ist hier dm, denn $\mathrm{dm}^3 = \mathrm{l}$.

Materialverbauch in Abhängigkeit von r: