Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 24.11.2025

6. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 19:

Mittels der Regel von L'Hospital ergeben sich

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\cos(x)} = \dfrac{0}{1} = 0,$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\tan(x)^2}{1} = \dfrac{1}{1} = 1 \qquad (\text{mit } (\tan(x))' = 1+\tan(x)^2),$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - \mathrm{e}^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin(x) - \mathrm{e}^x}{1} = \dfrac{-1}{1} = -1,$

(d) $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \ln(x) + \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{x\ln(x)+1}{x} \quad \Big|\text{hier nun l'Hospital, denn } \dfrac{0\cdot(-\infty)}{0} \text{ wird nix}$

$$= \lim_{x\to 0, x>0} \frac{1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{\ln(x)+1}{1} = -\infty.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 20:

(a) Ableitung von $N(p)$ und Elastizität $\eta(p)$ sind

$$N'(p) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}, \qquad \eta(p) = p\cdot\frac{N'(p)}{N(p)} = \frac{-\frac{1}{2}\frac{p}{\sqrt{p}}}{10-\sqrt{p}} = -\frac{\sqrt{p}}{20-2\sqrt{p}}.$$

Offensichtlich ist $\eta(p) \le 0$ für alle $p \in (0, 100)$, also

$$|\eta(p)| = \frac{\sqrt{p}}{20-2\sqrt{p}}.$$

Um den Bereich zu bestimmen, wo $N(p)$ preiselastisch ist, lösen wir zunächst

$$|\eta(p)| = \frac{\sqrt{p}}{20-2\sqrt{p}} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{p} = 20-2\sqrt{p} \quad\Leftrightarrow\quad 3\sqrt{p} = 20 \quad\Leftrightarrow\quad p = \pm\left(\frac{20}{3}\right)^2.$$

Nur der positive Wert liegt im zu untersuchenden Intervall. Der Umschlag zwischen preiselastisch zu preisunelastisch erfolgt also bei $p \approx 44.44$. Bleibt noch zu bestimmen, welche Seite preiselastisch ist: die einfachen Auswertungen

$$|\eta(36)| = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} < 1, \qquad |\eta(49)| = \frac{7}{6} > 1$$

ergeben, dass $N(p)$ für $p \in (44.44, 100)$ preiselastisch ist.

(b) Ableitung von $N(p)$ und Elastizität $\eta(p)$ sind

$$N'(p) = -3 + 0.0024p, \qquad \eta = \frac{-3p + 0.0024p^2}{1200 - 3p + 0.0012p^2}.$$

Offensichtlich sind $-3p+0.0024p^2 \leq 0$ und $1200-3p+0.0012p^2 \geq 0$ für $p \in (0,500)$, so dass

$$|\eta(p)| = \frac{3p-0.0024p^2}{1200-3p+0.0012p^2}.$$

Um den Bereich zu bestimmen, wo $N(p)$ preiselastisch ist, lösen wir zunächst

$$\frac{3p-0.0024p^2}{1200-3p+0.0012p^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3p-0.0024p^2 = 1200-3p+0.0012p^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 0.0036p^2-6p+1200 = 0.$$

Umformung und Anwendung der p-q-Formel führen auf

$$p^2 - \frac{6}{0.0036}p + \frac{1200}{0.0036} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{1,2} = \frac{3}{0.0036} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{0.0036}\right)^2 - 1200}$$

und also $p_1 = 1434.3$ (entfällt) und $p_2 = 232.4$. Einfache Auswertungen

$$|\eta(200)| = 0.778, \qquad |\eta(250)| = 1.14$$

ergeben, dass $N(p)$ für $p \in (232.4, 500)$ preiselastisch ist.

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 21:

(a) Gebraucht werden

$$f'(x) = x^2-2x-3, \qquad f''(x) = 2x-2.$$

Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3}, \qquad x_1 = 3,\ x_2 = -1.$$

Jeweils in die zweite Ableitung einsetzen:

$$f''(3) = 4 > 0, \qquad f''(-1) = -4 < 0.$$

Somit sind $(3,-9)$ ein Minimum und $(-1, 5/3)$ ein Maximum.

(b) Hier ist zunächst der Definitionsbereich zu beachten, DB$=[0,\infty)$. Erste Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x} - x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x} - x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x} + x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}.$$

Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

$$\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

In die zweite Ableitung einsetzen: $f''(0.5) \approx -0.86 < 0$. Somit ist $(0.5, 0.429)$ ein Maximum.

Weiter ist aber auch der linke Rand des DB zu untersuchen. Hier gilt, dass bei $x_2 = 0$ ein Minimum vorliegt, also ist zudem $(0,0)$ ein Minimum.

(c) Hier ist zunächst der Definitionsbereich zu beachten, denn unterm Logarithmus muss was Positives stehen. Also ist DB=$(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, \infty)$. Erste Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-1}, \qquad f''(x) = \frac{-2x^2-4x-6}{(x^2+2x-1)^2}$$

Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

$$\frac{2x+2}{x^2+2x-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1.$$

Jedoch liegt $x=-1$ nicht im Definitionsbereich. Weiter sind

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-1-\sqrt{2}, x<-1-\sqrt{2}} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-1+\sqrt{2}, x>-1+\sqrt{2}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Also hat $f(x)$ keine Extrema in $\mathbb{R}$.

(d) Erste Ableitungen:

$$f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}(n-x)e^{-x},$$
$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}e^{-x} - 2nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} = x^{n-2}(n^2-n-2nx+x^2)e^{-x}.$$

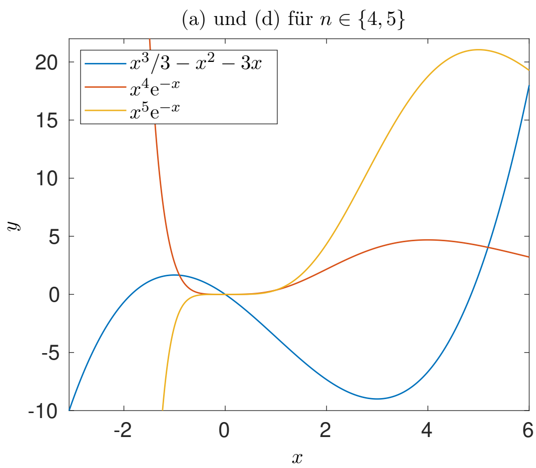
Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

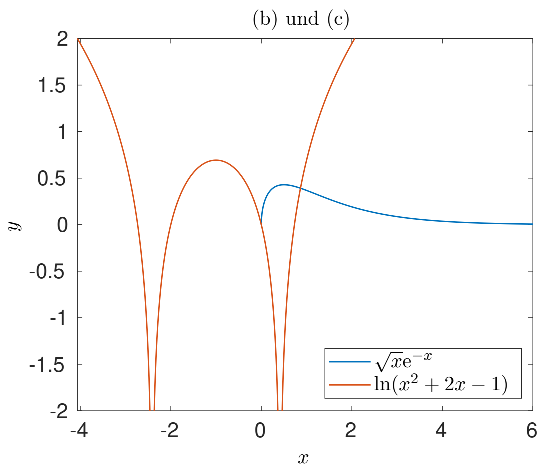
$$(n-x)x^{n-1}e^{-x} = 0, \qquad x_1 = n, \; x_2 = 0,$$

wobei x_2 eine $(n-1)$-fache Nullstelle ist. In die zweite Ableitung einsetzen:

$$f''(n) = n^{n-2}(n^2-n-2n^2+n^2)e^{-n} = n^{n-2}(-n)e^{-n} < 0, \qquad f''(0) = 0.$$

Somit ist zunächst $(n, n^n e^{-n})$ ein Maximum. Die Analysen der weiteren Ableitungen zeigen, dass die n-te Ableitung von $f(x)$ die erste von null verschiedene an de Stelle $x=0$ ist. Somit ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt, falls n ungerade ist und ein Minimum, falls n gerade ist.





Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 22:

Zu $f(x) = \ln(x)$ sind

$$f'(x) = x^{-1}, \quad f''(x) = -x^{-2}, \quad f'''(x) = 2x^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}, \quad f^{(5)}(x) = 24x^{-5}$$

mit

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2, \quad f^{(4)}(1) = -6, \quad f^{(5)}(1) = 24.$$

Damit ist das Taylorpolynom

$$\begin{aligned} T\big(f,1,5\big)(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5, \\ &= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \frac{24}{5!}(x-1)^5, \\ &= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 \end{aligned}$$

oder in anderer Form

$$\begin{aligned} f(1+h) &= f(1) + f'(1)h + \frac{f''(1)}{2!}h^2 + \frac{f'''(1)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}h^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}h^5 \\ &= 0 + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 23:

Gesucht ist p^*, sodass $N(p^*) = A(p^*)$ gilt. Eine mögliche Nullstellenform lautet

$$f(p) = N(p) - A(p) = 10 - \sqrt{p} - (-2 + \exp(p/10)).$$

1. Bisektionsverfahren, Startintervall $[15, 25]$:

Iter.	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
1	15	25	20	3.65	0.139	-5.18
2	20	25	22.5	0.139	-5.18	-2.23

   Die Nullstelle liegt also im Intervall $[20, 22.5]$.

2. Die Iteration lautet

$$p_{i+1} = p_i - \frac{10 - \sqrt{p} + 2 - \exp(p/10))}{-\frac{1}{2\sqrt{p}} - \frac{1}{10}\exp(p/10)}$$

   und zum Startwert $p_0 = 20$ ergeben sich

$$p_0 = 20, \qquad p_1 = 20.163, \qquad p_2 = 20.162.$$