Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 15.12.2025

9. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 30:

Die Ergebnisse sind

(i) $\int \frac{1}{5}x^4 + 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{25}x^5 + x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C,$

(ii) $\int \sqrt{x+1} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C,$

(iii) $\int_1^8 \sqrt[3]{x} \,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8 = \frac{3}{4}(8^{4/3} - 1) = \frac{45}{4},$

(iv) $\int \ln(ax+b) \,\mathrm{d}x = \frac{ax+b}{a}\ln(ax+b) - \frac{ax+b}{a} + C,$

(v) $\int \frac{1}{ax+b} \,\mathrm{d}x = \frac{\ln(ax+b)}{a} + C,$

(vi) $\int_1^2 \frac{(x+2)(x+1)}{x} \,\mathrm{d}x = \int_1^2 x + 3 + \frac{2}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 3x + 2\ln(x)\Big|_1^2 \approx 5.886.$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 31:

Die Ergebnisse sind

(i) Substitution $z = -cx^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -2cx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2c}\,\mathrm{d}z = x\,\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \quad \int x\exp(-cx^2)\,\mathrm{d}x \int -\frac{1}{2c}\exp(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2c}\exp(z) = -\frac{1}{2c}\exp(-cx^2)$$

(ii) Substitution $z = \ln(x+2) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\ln(x+2)}{2x+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{z}{2}\,\mathrm{d}z = \frac{z^2}{4} + C = \frac{(\ln(x+2))^2}{4} + C,$$

(iii) Substitution $z = \ln(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}z = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \quad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{z(1)}^{z(\mathrm{e})} 1 + z\,\mathrm{d}z = z + \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = 1.5.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 32:

Die Ergebnisse sind

(i) Wahl $u = \ln(x)$ und $v' = \sqrt{x}$ mit $u' = \frac{1}{x}$ und $v = \frac{2}{3}x^{1.5}$ ergibt

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}x^{1.5}\ln(x) - \int \frac{2}{3}\frac{x^{1.5}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{1.5}\ln(x) - \int \frac{2}{3}x^{0.5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}x^{1.5}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{1.5} + C.\end{aligned}$$

(ii) Wahl $u = x^2$ und $v' = \exp(x)$ mit $u' = 2x$ und $v = \exp(x)$ ergibt

$$\int_0^1 x^2 \exp(x) \, \mathrm{d}x = x^2 \exp(x)\big|_0^1 - \int_0^1 2x \exp(x) \, \mathrm{d}x$$

erneute partielle Integration mit $u = 2x$ und $v' = \exp(x)$ sowie dann $u' = 2$ und $v = \exp(x)$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \exp(x) \, \mathrm{d}x &= x^2 \exp(x) - 2x \exp(x)\big|_0^1 + \int_0^1 2 \exp(x) \, \mathrm{d}x \\ &= x^2 \exp(x) - 2x \exp(x) + 2 \exp(x)\big|_0^1 = \mathrm{e} - 2.\end{aligned}$$

(iii) Wahl $u = x$ und $v' = \sqrt{1+x}$ mit $u' = 1$ und $v = (1+x)^{1.5}/1.5$ ergibt

$$\int_1^3 x\sqrt{1+x} \, \mathrm{d}x = \frac{x(1+x)^{1.5}}{1.5}\bigg|_1^3 - \int_1^3 \frac{(1+x)^{1.5}}{1.5} \, \mathrm{d}x = \frac{x(1+x)^{1.5}}{1.5} - \frac{(1+x)^{2.5}}{3.75}\bigg|_1^3 = 7.0895.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 33:

Der durchschnittliche Funktionswert lässt sich berechnen als

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4-1}\int_1^4 -\frac{2}{x^3} + \frac{x^2}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^3}{9}\right)\bigg|_1^4 \approx 2.021.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 34:

Für die Trapezregel ergeben sich die Näherungen

$$\begin{aligned}T_2 &= 4\big(\tfrac{1}{2}0.058824 + 1 + \tfrac{1}{2}0.058824\big) = 4.2353, \\ T_4 &= 2\big(\tfrac{1}{2}0.058824 + 0.2 + 1 + 0.2 + \tfrac{1}{2}0.058824\big) = 2.9176, \\ T_8 &= 1\big(\tfrac{1}{2}0.058824 + 0.1 + 0.2 + 0.5 + 1 + 0.5 + 0.2 + 0.1 + \tfrac{1}{2}0.058824\big) = 2.6588\end{aligned}$$

und die Fehlerwerte sind 1.5837, 0.26601 sowie $7.1882 \cdot 10^{-3}$.

Für die Simpsonregel lauten die Werte

$$\begin{aligned}S_2 &= \tfrac{4}{3}\big(0.058824 + 4 \cdot 1 + 0.058824\big) = 5.4902, \\ S_4 &= \tfrac{2}{3}\big(0.058824 + 4 \cdot 0.2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0.2 + 0.058824\big) = 2.4784, \\ S_8 &= \tfrac{1}{3}\big(0.058824 + 0.4 + 0.4 + 2 + 2 + 2 + 0.4 + 0.4 + 0.058824\big) = 2.5725\end{aligned}$$

und die Fehlerwerte sind 2.8386, -0.17320 sowie $-7.9086 \cdot 10^{-2}$.