

12. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 42:

Aus dem Text ergeben sich folgende Gleichungen. Es werden $\alpha = 1\,000\text{€}$ mehr in Aktien als in die beiden anderen Investments zusammen investiert:

$$x_T - x_G - x_R = 1000.$$

Wenn die Investments in Gold und Rentenfonds jeweils verdoppelt werden, so sollen es zusammen immer noch $\beta = 500\text{€}$ weniger sein, als in Aktien:

$$x_T - 2x_G - 2x_R = 500.$$

Gold ist tendenziell out und soll nur 5% des Investments ausmachen:

$$x_G - 0.05(x_T + x_G + x_R) = 0.$$

Somit ergeben sich

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -0.05 & 0.95 & -0.05 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_T \\ x_G \\ x_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Eine LR -Zerlegung von A lautet

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -0.05 & -0.9 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die neue Lösung (Nutzung der LR -Zerlegung hierfür) ist

$$Lu = b \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 3\,000 \\ -2\,250 \\ -1\,875 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 5250 \\ 375 \\ 1875 \end{pmatrix}.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 43:

(a) Wir erhalten einen Zusammenhang der Form

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 1 \\ 2.5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_X \\ x_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_U \\ x_V \end{pmatrix}.$$

(b) Für die Inverse von M ergibt sich

$$M^{-1} = \frac{1}{7.5 - 2.5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2.5 & 2.5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2.5 & 2.5 \end{pmatrix}.$$

(c) Nutzen lässt sich der Zusammenhang

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2.5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_U \\ x_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_X \\ x_Y \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2.5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ lässt sich auch ein Gleichungssystem lösen, so wird die Inverse aus (b) nicht gebraucht.

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 44:

(a) Für (i) ergibt sich in (erweiterter) Kurzschreibweise

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array},$$

sodass nur zwei nicht-null-Zeilen übrig bleiben, der Rang ist also 2. Für (ii) ergibt sich

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ & -3 & -6 & 0 \\ & -6 & -12 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ & -3 & -6 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}$$

und auch hier bleiben nur zwei nicht-null-Zeilen übrig, der Rang ist also ebenso 2. Für (iii) ist in (erweiterter) Kurzschreibweise

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & -6 & 1 & 2 & 0 \\ & -4 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & -6 & 1 & 2 & 0 \\ & & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0. \end{array}$$

Es bleiben drei nicht-null-Zeilen übrig, der Rang ist also 3.

- (b) Jeweils ist zu klären, ob sich der Nullvektor nur als triviale Linearkombination (also alle Koeffizienten sind null) darstellen lässt oder auch anders. Für (i) ergibt sich aus

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \alpha + 2\beta & = & 0 \\ \alpha & = & 0 \end{array}$$

welches nur die Lösung $\beta = 0$, $\alpha = 0$ besitzt. Beide Vektoren sind also linear unabhängig.

Für (ii) ist

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine mögliche nichttriviale Lösung ist $\alpha = 1$, $\beta = -1$ und $\gamma = 1$. Die Vektoren sind also linear abhängig.

Für (iii) ist

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu untersuchen. Wegen der 1. Komponente ($\alpha = 0$) geht es nur mit $\alpha = 0$. Weiter ist dann wegen der 2. Komponente ($\alpha + 2\beta = 0$) auch $\beta = 0$. Letztlich ist wegen der 3. Komponente ($\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0$) dann auch $\gamma = 0$. Es gibt nur die triviale Lösung $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, somit sind die Vektoren linear unabhängig.

- (c) Bei (i) sind es zwei unabhängige Vektoren. Der Raum \mathbb{R}^2 hat die Dimension 2 und wird somit von ihnen generiert. Bei (ii) sind es 3 Vektoren, die jedoch linear abhängig sind. Der \mathbb{R}^3 hat die Dimension 3 und wird somit ($2 < 3$) nicht von diesen generiert. Bei (iii) sind es 3 linear unabhängige Vektoren, der \mathbb{R}^3 hat Dimension 3 und wird somit von ihnen generiert.
- (d) Die Mengen aus (i) und (iii) sind Basen des \mathbb{R}^2 bzw. des \mathbb{R}^3 , die Menge aus (ii) ist keine Basis von \mathbb{R}^3 .