Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 26.01.2026

13. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 45:

(a) Drei mögliche Basen sind:

$$B_1 = \left\{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}\right\},$$
$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}, \quad B_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

(b) Es gibt nur die beiden Abhängigkeiten x_1 zu x_2 sowie x_3 zu x_4, jeweils sind aber $x_{1/2}$ und $x_{3/4}$ unabhängig. Wir brauchen als 2 Basisvektoren, wegen 4 (Dimension) abzüglich 2 (Abhängigkeiten). Eine mögliche Basis (die Einschränkungen müssen natürlich jetzt berücksichtigt werden) ist

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

Bei den Einschränkungen ist wichtig zu beachten: wegen $3x_1 = 2x_2$ kommen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ für die Basis infrage sowie wegen $x_3 = -2x_4$ führt es z.B. auf $x_3 = 2$ und $x_4 = -1$.

Der Vektorraum hat die Dimension 2.

(c) Es gibt eine Einschränkung, $x_1 = x_4$, und der Vektorraum hat die Dimension $4 - 1 = 3$.

(d) Die Elemente der linearen Hülle von B haben die Gestalt

$$x = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha+2\beta\\ \alpha+2\beta\\ \alpha+2\beta\end{pmatrix}.$$

Offensichtlich lassen sich x_1 und z.B. x_2 beliebig konstruieren, jedoch gilt weiter stets, dass $x_2 = x_3 = x_4$. Die lineare Hülle ist also

$$\operatorname{span}(B) = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_2 = x_3 = x_4\right\}.$$

Eine möglichst einfache Basis ist

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 46:

Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -7 \\ \hline & -5 & 1 & -1 \end{array}$$

Rücksubstitution:

$$x = \begin{pmatrix} 3.6 - 0.4\alpha \\ 0.2 + 0.2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsmenge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 3.6 - 0.4\alpha \\ 0.2 + 0.2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \;:\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das System ist unterbestimmt, denn es gibt mehr Variablen als Gleichungen.

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 47:

Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 1 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & -1 & 3 & -16 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & -10 \end{array}$$

Rücksubstitution:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} - \frac{1}{3}s + \frac{5}{3}t \\ -10 - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsmenge (das System ist unterbestimmt):

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{26}{3} - \frac{1}{3}s + \frac{5}{3}t \\ -10 - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \;:\; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 48:

(a) Bei der Anwendung des Gauß-Algorithmus zu Aufgabe 46 bleiben bei der Vorwärtselimination zwei Nichtnull-Zeilen übrig, nämlich

$$\begin{array}{rrr} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{array}.$$

(Die rechte Seite braucht hier nicht mitbetrachtet werden, es geht nur um die Matrix.)

Somit ist der Zeilenrang 2 und wegen Zeilenrang=Spaltenrang=Rang ist der Rang der Matrix 2. Weiter gilt

$$\ker(A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.2 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Hier blieben ebenfalls zwei Nichtnull-Zeilen übrig, nämlich

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

und der Rang ist ebenfalls zwei. Weiter ist

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}s + \frac{5}{3}t \\ -2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \;:\; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

<u>Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 49:</u>

(a) zu 46: zusätzliche Restriktion $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} x_3 &= \alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq 0 \\ x_1 &= 3.6 - 0.4\alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq 9, \\ M_+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 3.6 - 0.4\alpha \\ 0.2 + 0.2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \;:\; \alpha \in [0, 9] \right\}. \end{aligned}$$

zu 47: zusätzliche Restriktion $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} &x_4 = t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t \geq 0 \\ &x_3 = s \geq 0 \quad \Rightarrow \quad s \geq 0 \\ &x_2 = -10 - 2t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t \leq -5 \quad \Rightarrow \quad \text{was ein Widerspruch zu } t \geq 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Somit ist die Lösungsmenge leer, also $M_+ = \emptyset$.

(b) zu 46: für die Kosten ergeben sich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} x_i &= (3.6 - 0.4\alpha) + (0.2 + 0.2\alpha) + (\alpha) \\ &= 3.8 + 0.8\alpha, \end{aligned}$$

welche für $\alpha = 0$ minimal werden, die Lösung ist also

$$x = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

für 47 ist die Lösungsmenge des LGS unter Nichtnegativitätsrestriktionen leer, somit gibt es auch keine Lösung mit minimalen Kosten.