

14. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 50:

Daten:

x	0	1	2	3	4
y	12	15	16	14	13

Ansatz:

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

Forderungen:

$$\begin{aligned}y(0) &= a + 0b + 0c = 12 \\y(1) &= a + b + c = 15 \\y(2) &= a + 2b + 4c = 16 \\y(3) &= a + 3b + 9c = 14 \\y(4) &= a + 4b + 16c = 13.\end{aligned}$$

Lineares Gleichungssystem (überbestimmt) $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 16 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Gaußsche Normalgleichung ($A^T Ax = A^T b$) und dessen Lösung $x = (a, b, c)^T$ sind

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 141 \\ 413 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 12.23 \\ 3.24 \\ -0.786 \end{pmatrix}.$$

Also

$$p(x) = 12.23 + 3.24x - 0.786x^2.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 51:

Daten:

x	0.5	1	1.5	2	4
y	1.5	2.67	3.75	5	7

Ansatz:

$$f(x) = a + bx + c\sqrt{x}$$

Forderungen:

$$y(0.5) = a + 0.5b + \sqrt{0.5}c = 1.5$$

$$y(1) = a + b + \sqrt{1}c = 2.67$$

$$y(1.5) = a + 1.5b + \sqrt{1.5}c = 3.75$$

$$y(2) = a + 2b + \sqrt{2}c = 5$$

$$y(4) = a + 4b + \sqrt{4}c = 7.$$

Lineares Gleichungssystem (überbestimmt) $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & \sqrt{0.5} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.5 & \sqrt{1.5} \\ 1 & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.67 \\ 3.75 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Gaußsche Normalgleichung ($A^T Ax = A^T b$) und dessen Lösung $x = (a, b, c)^T$ sind

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 6.346 \\ 9 & 23.5 & 14.019 \\ 6.346 & 14.019 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19.92 \\ 47.045 \\ 29.395 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2.533 \\ -0.5920 \\ 5.974 \end{pmatrix}.$$

Also

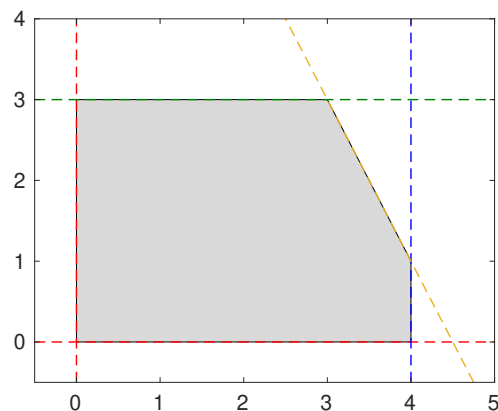
$$p(x) = -2.533 - 0.5920x + 5.974\sqrt{x}.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 52:

Zu Berücksichtigen sind $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ sowie

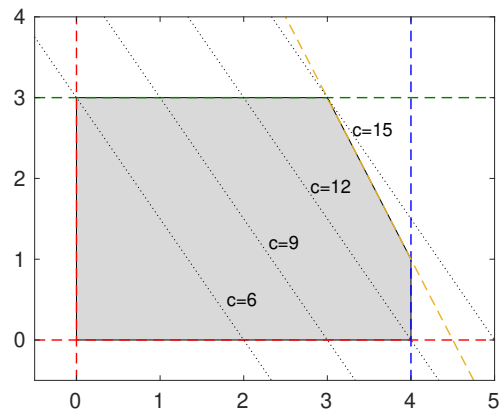
$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 9. \end{aligned}$$

Der zulässige Bereich ist somit



Optimierung:

- Zielfunktion $f(x) = 3x_1 + 2x_2$,
- also $3x + 2y = c \rightarrow \max$,
- Geradengleichung $y = \frac{c}{2} - \frac{3}{2}x$ mit $c \rightarrow \max!$,
- optimale Lsg.: $x = 3, y = 3, c = 15$.

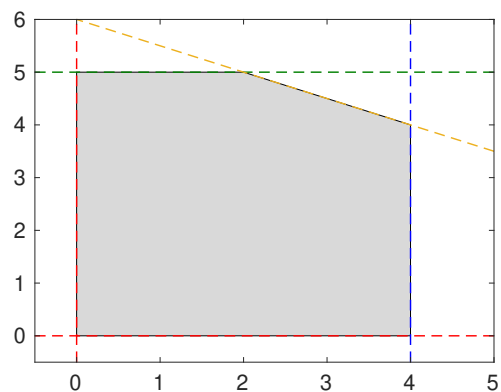


Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 53:

Zu Berücksichtigen sind $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ sowie

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 12. \end{aligned}$$

Der zulässige Bereich ist somit



Optimierung:

- Zielfunktion $f(x) = 2x_1 + 3x_2$,
- also $2x + 3y = c \rightarrow \max$,
- Geradengleichung $y = \frac{c}{3} - \frac{2}{3}x$ mit $c \rightarrow \max!$,
- optimale Lsg.: $x = 4, y = 4, c = 20$.

