

Mathematische Methoden in den Wirtschaftswissenschaften.

Mathias Sawall

Institut für Mathematik, Universität Rostock

WS 2026/2027

Vorlesungen (21 an der Zahl):

- Mo 11.00 - 13.00, SR 219
- Mi 11.00 - 13.00 (nur an geraden Wochen), SR 024

Übungen:

- Mi 11.00 - 13.00 (ungerade Wochen), SR 024

Prüfung:

- Klausur, 90 Minuten
- Hilfsmittel: nichtprogrammierbarer Taschenrechner, Tafelwerk
7 doppelseitig handbeschriebene A4-Blätter

Bei Fragen:

- mathias.sawall@uni-rostock.de
- Raum 431, Ulmenstraße 69, Haus 3

Ziele der Lehrveranstaltung:

- Vertiefung der mathematischen Kenntnisse
- Anbindungen an ökonomische Modelle
- Werkzeuge zur Lösung komplexerer Fragestellungen
- höherer Anteil aus der linearen Algebra

Auswahl Nobelpreise der Wirtschaftswissenschaften mit math. Modellen:

- P. A. Samuelson (1970, dynamische Wirtschaftsentwicklung)
- W. Leontief (1973, input-output-Modelle)
- L. W. Kantorowitsch, T. C. Koopmans (1975, Ressourcenoptimierung)
- H. Markowitz (1990, Portfolio-Modelle)
- R. C. Merton, M. S. Scholes (1997, Bewertung von Kaufoptionen)

Wichtige und i.d.R. neue Themen sind etwa:

- Differenzengleichungen
- Differentialgleichungen, analytische und numerische Lösung
- Determinanten, Eigenwerte und -vektoren
- Simplex-Algorithmus und Dualität
- Automatisierte Klassifizierung, maschinelles Lernen
- Interpolation und numerische Differentiation, optional Extrapolation
- logistische Gleichung (Fixpunkte und deren Stabilität)

Konkrete Anwendungen:

- Modellierung dynamischer Systeme, Marktsituationen, Konkurrenz
- Page-rank Algorithmus (Suchmaschinen), geschlossene Wirtschaftssysteme, Leontief-Modelle, nachhaltige Gleichgewichte, Kaufverhalten
- Transportproblem, Logistik
- Support vector machines, K -means

1. Differenzengleichungen
2. Differentialgleichungen
3. Lineare Algebra in der Ökonomie
4. Lineare Optimierung und Dualität
5. Interpolation und numerische Differentiation
6. Fixpunktiterationen
7. Literatur

1. Differenzengleichungen
2. Differentialgleichungen
3. Lineare Algebra in der Ökonomie
4. Lineare Optimierung und Dualität
5. Interpolation und numerische Differentiation
6. Fixpunktiterationen
7. Literatur

Fibonacci-Folge:

- Rekursion

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

- Anfangswerte $a_0 = a_1 = 1$
- Rekursion und Anfangswerten definieren zusammen die gesamte Folge

Lösung:

- geometrischer Ansatz $a_n = z^n$,
- Einsetzen in die Rekursionsformel ergibt die charakteristische Gleichung

$$z^2 - z - 1 = 0$$

- deren Lösungen sind

$$z_1 = 1 + \sqrt{5}/2, \quad z_2 = 1 - \sqrt{5}/2$$

- allgemeine Bildungsvorschrift hat die Form

$$a_n = cz_1^n + dz_2^n.$$

Bestimmung der Konstanten:

- Bestimmung von c und d mittels der Startwerte $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$

$$a_n = cz_1^n + dz_2^n$$

- lineares Gleichungssystem

$$a_1 = cz_1^1 + dz_2^1 \quad \rightarrow \quad 1 = c(1 + \sqrt{5}/2) + d(1 - \sqrt{5}/2),$$

$$a_2 = cz_1^2 + dz_2^2 \quad \rightarrow \quad 1 = c(1 + \sqrt{5}/2)^2 + d(1 - \sqrt{5}/2)^2$$

führt auf $c = \sqrt{5}/5, \quad d = -\sqrt{5}/5,$

- explizite Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Bemerkungen:

- Grad charakt. Gleichung = Rekursionstiefe = Anzahl nötiger Startwerte
- selbes Prinzip zur Lösung bei allen linearen Differenzengleichungen
- allgemeine Form einer homogenen Differenzengleichung

$$a_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_{n-i}, \quad \text{Anfangsstück } a_1, \dots, a_k \text{ gegeben}$$

Inhomogene Differenzengleichung:

- häufig enthalten Differenzengleichungen Absolutglieder (inhomogen)
- Beispiele aus Mathe I
- drei einfache Beispiele sind

$$a_{n+1} = 0.3a_n + 1,$$

$$b_{n+1} = 300 + 0.3b_n + 0.12b_{n-1},$$

$$c_{n+1} = 5 + 1.05c_n$$

- gesucht ist explizite Bildungsvorschrift $a_n = a(n)$

Ansatz:

- allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$a(n) = a_h(n) + a_p(n)$$

- $a_h(n)$ ist allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzengl.
- $a_p(n)$ ist eine (!) partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengl.
- Berechnung der Konstanten wieder mittels der Anfangswerte

Parallele:

- Lösung unterbestimmter inhomogener linearer Gleichungssysteme

$$Ax = b, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{rg}(A) < n$$

- Lösung des homogenen Systems $Ax = 0$ lautet

$$L = \ker(A) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r\}$$

- eine spezielle Lösung x_p mit $Ax_p = b$ führt auf die allgemeine Lösung

$$M = x_p + \ker(A), \quad x = x_p + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r.$$

Lösung inhomogener Differenzengleichungen

Beispiel:

$$a_{n+1} = 5 + 1.05a_n$$

Lösung der homogenen Differenzengleichung:

- die homogene Gleichung lautet $a_{n+1} = 1.05a_n$
- die charakteristische Gleichung ist $z - 1.05 = 0$
- allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$a_h(n) = c1.05^n$$

Lösung des inhomogenen Teils:

- eine spezielle Lösung wäre hier eine Konstante $a_n = d$
- einsetzen ergibt

$$a_{n+1} = d = 5 + 1.05a_n = 5 + 1.05d \quad \Rightarrow \quad -0.05d = 5 \quad \Rightarrow \quad d = -100$$

- allgemeine Lösung hat die Form

$$a_n = c1.05^n - 100$$

- Anfangswert führt auf die Konstante c

Beispiel:

- für den Anfangswert $a_1 = 5$ ergibt sich

$$a_1 = 5 = c \cdot 1.05^1 - 100,$$

$$c = \frac{105}{1.05} = 100$$

- explizite Bildungsvorschrift lautet in diesem Fall

$$a_n = a(n) = 100(1.05^n - 1), \quad a_{123} \approx 40291.$$

Bemerkung 1

Ist $z = 1$ die Lösung der charakteristischen Gleichung, so ist die Berechnung einer partikulären Lösung so nicht möglich (Division durch 0). Die Rekursion hat die Form

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Die Lösung ist in diesem Fall trivial und die explizite Bildungsvorschrift lautet

$$a(n) = a_1 + nd.$$

Beispiel 1

Wir betrachten

$$a_{n+1} = 300 + 0.3a_n + 0.12a_{n-1}, \quad a_0 = 100, a_1 = 130.$$

Beispiel 1

Wir betrachten

$$a_{n+1} = 300 + 0.3a_n + 0.12a_{n-1}, \quad a_0 = 100, a_1 = 130.$$

Homogene Gleichung

$$a_{n+1} = 0.3a_n + 0.12a_{n-1}$$

Charakteristische Gleichung mittels $a_n = z^n$

$$z^{n+1} = 0.3z^n + 0.12z^{n-1} \quad \Rightarrow \quad z^n(z^2 - 0.3z - 0.12) = 0$$

Nullstellen

$$z_{1,2} = 0.15 \pm \sqrt{\frac{57}{20}}, \quad z_1 = 0.5275, \quad z_2 = -0.2275$$

Lösung der homogenen Gleichung

$$a_h(n) = b \cdot 0.5275^n + c \cdot (-0.2275)^n$$

Beispiel 1

Wir betrachten

$$a_{n+1} = 300 + 0.3a_n + 0.12a_{n-1}, \quad a_0 = 100, a_1 = 130.$$

Ansatz für Partikularlösung

$$a_n = d = \text{const.}$$

Führt auf

$$d = 300 + 0.3d + 0.12d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{15000}{29} = 517.24 = a_p$$

Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} a(n) &= a_h(n) + a_p \\ &= b \cdot 0.5275^n + c \cdot (-0.2275)^n + 517.24 \end{aligned}$$

Beispiel 1

Wir betrachten

$$a_{n+1} = 300 + 0.3a_n + 0.12a_{n-1}, \quad a_0 = 100, a_1 = 130.$$

Anfangswerte

$$100 = b + c + 517.24,$$

$$130 = 0.5275b - 0.2275c + 517.24$$

Lösung des linearen Gleichungssystems

$$b = -638.6, c = 221.4$$

Lösung der Differenzengleichung

$$a(n) = -638.6 \cdot 0.5275^n + 221.4 \cdot (-0.2275)^n + 517.24$$

Aufgabe 20080725A4.

Beim monatlichen Härtetest nehmen regelmäßig 200 neue Kandidaten teil. Es bestehen 40% auf Anhieb. Von den Kandidaten, die durchfallen, geben 50% auf, die anderen treten zum nächsten Termin erneut an.

Stellen Sie eine Rekursionsvorschrift für die Anzahl a_k der Teilnehmer beim k -ten Test auf.

Geben Sie die Teilnehmerzahlen a_k für $k = 1, \dots, 5$ und die Zahl der erfolgreichen Kandidaten für den Zeitraum bis $k = 5$ an. (Hinweis: Beim ersten Test gibt es keine Wiederholungskandidaten.)

Berechnen Sie den Grenzwert von a_k für $k \rightarrow \infty$, sofern die Folge konvergiert.

Aufgabe 20080725A4.

Beim monatlichen Härtetest nehmen regelmäßig 200 neue Kandidaten teil. Es bestehen 40% auf Anhieb. Von den Kandidaten, die durchfallen, geben 50% auf, die anderen treten zum nächsten Termin erneut an.

Stellen Sie eine Rekursionsvorschrift für die Anzahl a_k der Teilnehmer beim k -ten Test auf.

Geben Sie die Teilnehmerzahlen a_k für $k = 1, \dots, 5$ und die Zahl der erfolgreichen Kandidaten für den Zeitraum bis $k = 5$ an. (Hinweis: Beim ersten Test gibt es keine Wiederholungskandidaten.)

Berechnen Sie den Grenzwert von a_k für $k \rightarrow \infty$, sofern die Folge konvergiert.

Lösung (I):

- Rekursionsvorschrift

$$a_n = 0.3a_{n-1} + 200$$

(hier eine inhomogene Differenzengleichung),

- Startwert $a_1 = 200$,
- einfaches Einsetzen führt auf

$$a_2 = 260, a_3 = 278, a_4 = 283.4, a_5 = 285.02,$$

- erfolgreiche Kandidaten

$$b_1 = 80, b_2 = 104, b_3 = 111.2, b_4 = 113.36, b_5 = 114.01.$$

Aufgabe 20080725A4.

Beim monatlichen Härtetest nehmen regelmäßig 200 neue Kandidaten teil. Es bestehen 40% auf Anhieb. Von den Kandidaten, die durchfallen, geben 50% auf, die anderen treten zum nächsten Termin erneut an.

Stellen Sie eine Rekursionsvorschrift für die Anzahl a_k der Teilnehmer beim k -ten Test auf.

Geben Sie die Teilnehmerzahlen a_k für $k = 1, \dots, 5$ und die Zahl der erfolgreichen Kandidaten für den Zeitraum bis $k = 5$ an. (Hinweis: Beim ersten Test gibt es keine Wiederholungskandidaten.)

Berechnen Sie den Grenzwert von a_k für $k \rightarrow \infty$, sofern die Folge konvergiert.

Lösung (II):

- Rekursionsvorschrift (inhomogene Differenzengleichung)

$$a_n = 0.3a_{n-1} + 200,$$

- zunächst nur homogene Differenzengleichung betrachten

$$a_n = z^n \Rightarrow z^n = 0.3z^{n-1} \Rightarrow z = 0.3,$$

- Lösung der inhomogenen Diff.-gl. hat die Form $a_n = c \cdot 0.3^n + d$,
- Anfangswerte $a_1 = 200$, $a_2 = 260$ führen auf

$$a_n = -\frac{2000}{7} \cdot 0.3^n + \frac{2000}{7},$$

- somit $a_3 = 278$, $a_4 = 283.4$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2000}{7} = 285.71 \Rightarrow \text{Gleichgewicht.}$

Modell aus Mathe 1 - Simulation einer Schuldenentwicklung:

- Guthaben vergangenen Monat $K_0 = -10\,000\text{€}$,
- Guthaben diesen Monat $K_1 = -11\,000\text{€}$,
- sei k^* eine akzeptable Restschuld, so lautet die Iteration

$$K_{n+1} = k^* + a \cdot (K_n - k^*) + b \cdot (K_n - K_{n-1})$$

mit Steuerparametern a, b

- für $k^* = -8\,000$, $a = 0.95$, $b = 1.02$ ergibt sich

$$K_{n+1} = 1.97K_n - 1.02K_{n-1} + 400$$

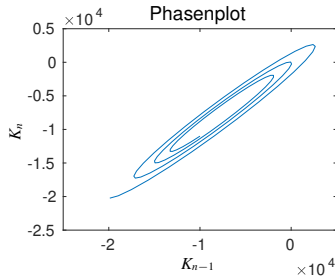
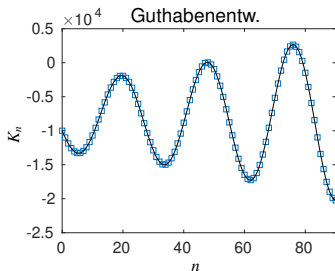
Fragen nach:

- expliziter Bildungsvorschrift, dies wäre für die gewählten Parameter

$$K_n = -(10^3 + 2308.4i)(0.99 - 0.22i)^n - (10^3 - 2308.4i)(0.99 + 0.22i)^n - 8\,000$$

- Stabilisierung um k^* in Abhängigkeit von a und b

Plots für $k^* = 8\,000$, $a = 0.95$, $b = 1.02$:



Komplexe Zahlen

- ggf. nötig zur Konvergenz- und Stabilitätsanalyse der Lösungen von Differentialgleichungen
- Erweiterung der reellen Zahlen um imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$

Definition 1.1

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Das Paar

$$z = (x, y) = x + yi$$

ist eine komplexe Zahl mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$.

Die Menge der komplexen Zahlen ist $\mathbb{C} = \{z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$. Der Betrag einer komplexen Zahl ist

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Anmerkungen:

- Division

$$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i, \quad \text{z.B. } \frac{4 + 3i}{2 + i} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5} i$$

- imaginäre Einheit $i^2 = -1$
- Wurzeln komplexer Zahlen sind ebenfalls komplexe Zahlen
- mittels komplexer Zahlen wird jede quadratische Gleichung lösbar
- mehr noch:

Satz 1.2 (Fundamentalsatz der Algebra)

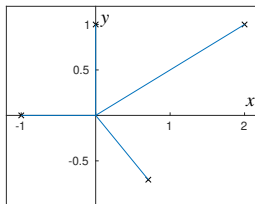
Jede nicht-konstante Polynomgleichung n -ten Grades hat n (nicht notwendigerweise verschiedene) komplexe Lösungen.

Anders ausgedrückt: Jedes nicht-konstante reelle Polynom hat im Komplexen genau n Nullstellen.

Lemma 1.3 (Trigonometrische Darstellung)

Für jede komplexe Zahl $z = x + yi$ gibt es einen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ (bezeichnet mit $\varphi = \arg(z)$), sodass

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = |z| \exp(i\varphi).$$



Radizieren:

- Berechnung von $z = \sqrt[n]{a}$

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \sqrt[n]{|a|} \exp\left(i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1, \\ &= \sqrt[n]{|a|} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

- Lösungen auf dem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|a|}$ in der komplexen Ebene.

Beispiel 2

Die drei dritten Wurzeln von $a = -1$ sind

$$z_1 = -1,$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0.5 + 0.87i,$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) \approx 0.5 - 0.87i.$$

Anwendungen:

- Umformung eines Modells in explizite Darstellung möglich
- häufig sind die Modellierungen in der Ökonomie von Interesse
- mittels Rekursion Verläufe für einen begrenzten Zeitraum modellieren
- Tabellenkalkulationen oder richtige Programmiersprache nutzen

Differenzengleichungen in der Ökonomie:

- Multiplikator-Akzelerator-Modell
- Cobb-Webb-Modell
- Entwicklungen gekoppelter Güter, Wirtschafts- oder Industriezweige
- Fragen nach Stationarität und Stabilität

Multiplikator-Akzelerator-Modell:

- Keynesianisches Modell zur Simulation von Konjunkturzyklen
- auch als Samuelson-Hicks-Modell bekannt
- Modellierung von Güternachfrage und Investitionen
- Nachfrage bestimmt Produktion und Einkommen

Parameter:

- Konsumfunktion

$$C_n = C_a + cY_{n-1}, \quad c \in [0, 1]$$

- Investitionsfunktion

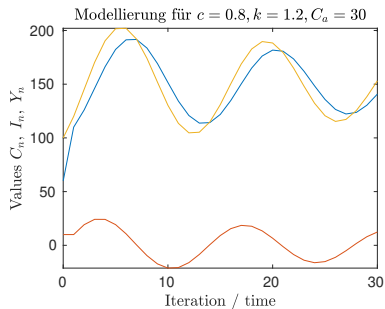
$$I_n = ck(Y_{n-1} - Y_{n-2}), \quad k > 0$$

- Gesamtnachfrage

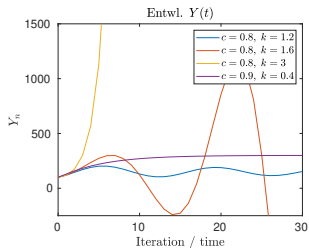
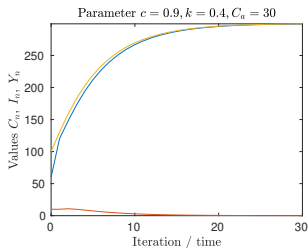
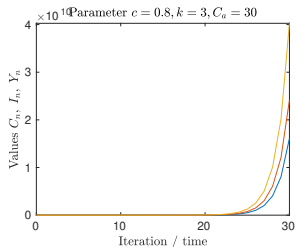
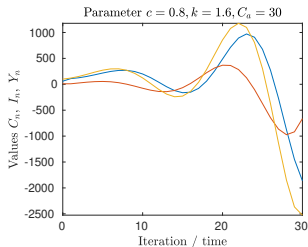
$$Y_n = C_n + I_n$$

Differenzengleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} C_n \\ I_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_a + cY_{n-1} \\ ck(Y_{n-1} - Y_{n-2}) \\ C_n + I_n \end{pmatrix}$$



Verschiedene Parameter



Umformung in Differenzengleichung 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}Y_{n+1} &= C_{n+1} + I_{n+1} \\ &= C_a + c(1+k)Y_n - ckY_{n-1}\end{aligned}$$

Stabilität:

- charakteristische Gleichung der homogenen Differenzengleichung

$$z^2 - c(1+k)z + ck = 0$$

- Lösungen sind

$$z_{1,2} = \frac{(1+k)c}{2} \pm \sqrt{\frac{((1+k)^2c - 4k)c}{4}}$$

- offensichtlich kann z hier komplex sein kann
- Analyse der Stabilität und des Schwingverhaltens

Satz 1.4 (Beschränktheit der Iterierten)

Die Iterierten einer Differenzengleichung bleiben genau dann für $n \rightarrow \infty$ beschränkt, wenn die Nullstellen z_i des charakteristischen Polynoms die Wurzelbedingung erfüllen.

Die Nullstellen erfüllen die Wurzelbedingung, wenn

$$|z_i| < 1 \quad \text{oder} \quad |z_i| = 1 \text{ und } z_i \text{ ist einfache Nullstelle}$$

für alle $i = 1, \dots, r$ gilt.

Stabilität:

- Iterierte bleiben beschränkt, wenn

$$\left| \frac{(1+k)c}{2} \pm \sqrt{\frac{((1+k)^2c - 4k)c}{2}} \right| \leq 1$$

- die Lösungen bleiben also im komplexen Einheitskreis
- dies ist der Fall, wenn

$$c \leq \frac{1}{k}$$

Schwingverhalten (komplexer Fall):

- schwingendes Verhalten, wenn beide Nullstellen echt komplex sind
- die Nullstellen sind komplex für

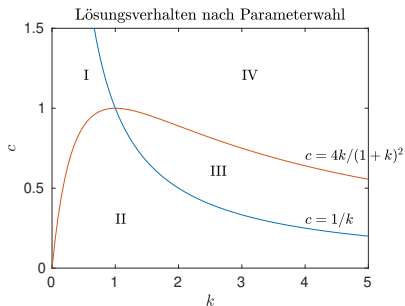
$$c(1 + k^2) - 4k < 0 \quad \Rightarrow \quad c < \frac{4k}{(1 + k)^2}$$

Schwingverhalten (reeller Fall):

- Schwingungen können sich einstellen, wenn eine Nullstelle z_i negativ ist
- jedoch nur, wenn die betragsgrößere Nullstelle negativ ist

Bereiche:

	konvergent (gedämpft)	divergent (verstärkend)
monoton	<i>I</i>	<i>IV</i>
schwingend	<i>II</i>	<i>III</i>



Bemerkung 2

Jede Differenzengleichung n -ter Ordnung lässt sich in ein System von n gekoppelten Differenzengleichungen erster Ordnung überführen und andersherum.

Hilfsvariable

$$z \in \mathbb{R}^n, \quad z = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

System

$$z^{(i+1)} = (z_2^{(i)}, \dots, z_n^{(i)}, f(z_1^{(i)}, \dots, z_{n-1}^{(i)}))^T$$

Multiplikator-Akzelerator-Modell:

- Differenzengleichung 2. Ordnung

$$Y_{i+1} = C_a + c(1+k)Y_i - ckY_{i-1}$$

- 2D-System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} Y_{i-1} \\ Y_i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -ck & c(1+k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} 0 \\ C_a \end{pmatrix}$$

Gleichgewichtslösung (Partikularlösung):

- für die Iteration $z_{i+1} = Az_i + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soll gelten $z_{i+1} = z_i = z^*$
- Umstellen liefert

$$(I - A)z^* = b \quad \Rightarrow \quad z^* = (I - A)^{-1}b$$

- eindeutige Lösung, falls $\text{rg}(I - A) = n$

Stabilität:

- alternative Analyse mittels Eigenwerten von A , siehe Abschnitt 2
- ein Eigenwert ist ein $\lambda \in \mathbb{C}$, für welches es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ gibt, sodass

$$Av = \lambda v$$

- die Iterierten bleiben beschränkt, falls alle Eigenwerte von A betragsmäßig kleiner als 1 bleiben.

1. Differenzengleichungen
- 2. Differentialgleichungen**
3. Lineare Algebra in der Ökonomie
4. Lineare Optimierung und Dualität
5. Interpolation und numerische Differentiation
6. Fixpunktiterationen
7. Literatur

Übergang vom diskreten Modell zum kontinuierlichen:

- Folgen modellieren Entwicklungen für diskrete Zeitpunkte
- Differenzengleichung beschreiben Übergänge zwischen den Zeitpunkten
- exakte Modellierung durch kontinuierliche Zeitskala

Definition 2.1

Eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad a \leq x \leq b$$

mit gegebenem $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und einer gesuchten Lösung $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Übergang für Bevölkerungsentwicklung:

- diskretes Modell mit k den Jahren führt auf

$$Y_{k+1} = (1 + g - s) \cdot Y_k, \quad g, s, g - s > 0$$

- sehr einfaches Modell, abgeschlossen also keine Zu- oder Abwanderung
- sinnvoll wären etwa

$$g = \frac{3.5}{2 \cdot 60}, \quad s = \frac{1}{60} \quad (\text{um 1900}),$$

$$g = \frac{1.8}{2 \cdot 75}, \quad s = \frac{1}{75} \quad (\text{um 1980}),$$

$$g = \frac{1.9}{2 \cdot 80}, \quad s = \frac{1}{80} \quad (\text{um 2010})$$

- kontinuierliches Modell führt auf

$$\frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = (g - s) \cdot y(t) \quad (1)$$

Realistischeres Modell:

- Ansatz aus (1) führt ggf. auf unbeschränktes Wachstum
- realistischere Modellierung mit streng monoton fallender Geburtenrate

$$g = g_0 - \gamma y(t), \quad \dot{y}(t) = ay(t) - by(t)^2$$

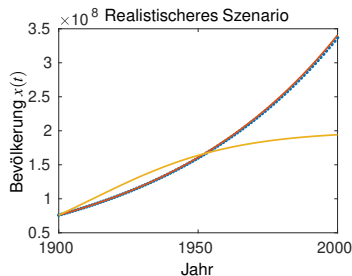
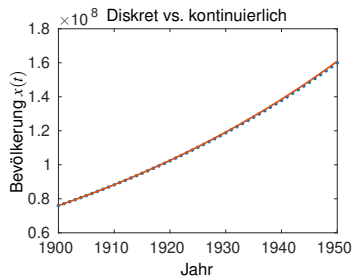
- auch Verhulst oder logistische Gleichung genannt, siehe später Kapitel 1
- analytische Lösung mit $y(0) = y_0$ ist

$$y(t) = -\frac{y_0 b}{(ay_0 - b) \exp(-bt) - y_0 a}$$

P.-F. Verhulst: *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, Correspondance mathématique et physique 10, 113–121, 1938.

Modellierungen diskretes und kontinuierliches Modell:

- Modellierung für Bevölkerungszahlen der USA
- startend mit $x(1900) \approx 76.000.000$
- Simulation bis 1950, Vergleich diskretes und kontinuierliches Modell
- Simulation bis 2000 mittels angepasster Geburtenrate
- Einwanderung nicht mit modelliert



Diskrete Zinsen:

- vorgegebene Zeitintervalle/Zeitskala, etwa Monate
- monatliche Berechnung der Zinsen, monatliche Einzahlungen
- Entwicklung des Kapitals

$$K_{n+1} = (1 + p)K_n + E$$

Kontinuierliches Modell:

- ohne Einzahlungen ist Zuwachs proportional zum aktuellen Kapital

$$\frac{dK}{dt}(t) = \dot{K}(t) = pK(t)$$

- mit zusätzlicher Einzahlung von E pro Zeiteinheit 1 ergibt sich

$$\frac{dK}{dt}(t) = pK(t) + E$$

Zinsseszinsformel lautet (diskreter Fall):

$$K_n = K_0(1 + p)^n + E \frac{(1 + p)^n - 1}{p}$$

Lösung des kontinuierlichen Modells: (zunächst ohne E)

- Zinssatz p ist die Vermehrungsrate pro 1 Zeiteinheit
- Umformen ergibt

$$dK = pK dt$$

- Trennung der Variablen

$$\frac{1}{K} dK = p dt$$

- Integration beider Seiten liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} dK = p dt &\Leftrightarrow \int \frac{1}{K} dK = \int p dt \Leftrightarrow \ln |K| = pt + C \\ \Rightarrow K(t) &= \tilde{C} \exp(pt) \end{aligned}$$

- $\tilde{C} \in \mathbb{R}_+$ ist eine Konstante, hier $\tilde{C} = K_0$

Berücksichtigung von E :

- $K(t) = \tilde{C}_0 \exp(pt)$ ist allg. Lösung der homogenen Differentialgleichung
- analog zu Differenzengleichungen Berechnung einer Partikularlösung

$$K_p(t) = -\frac{E}{p}$$

- allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet

$$K(t) = \tilde{C} \exp(pt) - \frac{E}{p}$$

- Anfangswert $K_0 = K(0)$ liefert die Lösung

$$K(t) = \left(K_0 + \frac{E}{p}\right) \exp(pt) - \frac{E}{p}$$

Grenzwert des diskreten Falls:

- Unterteilung eines Zeitintervalls in m kleinere
- neue Parameter sind $\tilde{n} = mn$, $\tilde{E} = E/m$, $\tilde{p} = p/m$, Berechnung von $\tilde{K}_n$
- Einsetzen in ZZF ergibt

$$\tilde{K}_n = \left(K_0 + \frac{E}{p} \right) \left(\frac{m+p}{m} \right)^{mn} - \frac{E}{p}$$

- Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ betrachten,
mit $\lim_{m \rightarrow \infty} ((m+p)/p)^m = \exp(p)$ ergibt sich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{K}_n = \left(K_0 + \frac{E}{p} \right) \exp(pn) - \frac{E}{p}$$

Bemerkung 3

Die Formel aus der kontinuierlichen Betrachtung stimmt also mit dem Grenzwert des diskreten Modells überein.

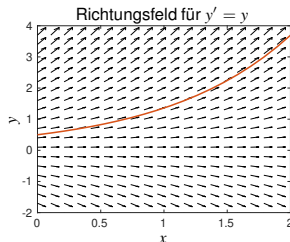
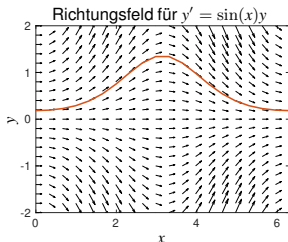
Definition 2.2

Sei $f : [a, b] \times \mathbb{R}$. Eine explizite Differentialgleichung n -ter Ordnung hat die Form

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad a \leq x \leq b.$$

Bemerkung 4

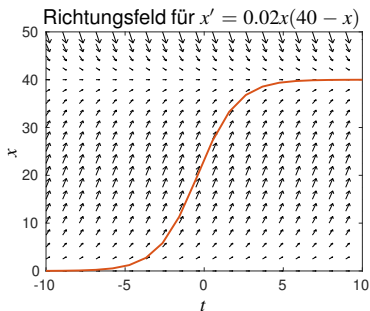
Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften führen oft nur auf Differentialgleichungen erster Ordnung, siehe Definition 2.1.



Richtungsfeld:

- für Differentialgleichung erster Ordnung mit einer Variablen
- Darstellung des Anstiegs von y in Abhängigkeit von $(x, y(x))$

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$



Anfangswertproblem:

- eine Differentialgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen *Ist-Zustand*, äußeren Einflüssen und *Änderungsverhalten*
- ist zudem ein aktueller Wert bekannt (Anfangswert $y(x_0) = y_0$), so handelt es sich um ein Anfangswertproblem

Definition 2.3

Mit $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat ein Anfangswertproblem die Form

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x, y(x)), & a \leq x \leq b, \\y(a) &= y_0.\end{aligned}$$

Gesucht:

$$y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Anwendungsbeispiele I:

- Modellierung von Konjunkturzyklen
- allgemein Räuber-Beute-Systeme
 - ~> Modellierung von Wechselwirkungen (Konkurrenz, Synergie)
- Wechselspiel zwischen Beschäftigungsgrad und Lohnquote
- Bevölkerungsentwicklung, logistische Gleichung

Anwendungsbeispiele II:

- Radioaktiver Zerfall von Atomen ~> Altersbestimmung (Isotope)
- Räuber-Beute-Systeme (Biologie)
- Reaktionskinetik (Chemie), dynamische Mehrkörpersysteme (Physik)

Beispiel einer kontinuierlichen Preisanpassung:

- Nachfrage und Angebot

$$N(p) = 10 - \frac{p(t)}{2}, \quad A(p) = 2 + p(t)$$

- Reaktionsgeschwindigkeit für Preisanpassungen am Markt $k = 0.5$
- Preisänderung

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= k \cdot (N(p) - A(p)) \\ &= 0.5 \left(10 - \frac{p(t)}{2} - (2 + p(t)) \right) = 4 - \frac{3}{4}p(t) \end{aligned}$$

- Gleichgewichtspreis $p^* = 16/3$

Gesucht: Preisentwicklung über die Zeit

Formale Lösung:

$$y(x) = y_0 + \int_a^b f(t, y(t)) \, dt$$

Einfache Fälle:

- Exponentielles Verhalten

$$y' = ky, \quad y(0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = y_0 \exp(kx)$$

- Wurzelfunktion

$$y' = \frac{x}{y}, \quad y(0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \sqrt{x^2 + y_0^2}.$$

Schwierigkeit:

- Integrand hängt von der unbekannten Funktion $y(x)$ ab
- nicht selten lassen sich Anfangswertprobleme nur numerisch lösen

Definition 2.4

Die Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt eine Lipschitz-Bedingung zur Lipschitz-Konstanten $L > 0$, falls für alle $x \in [a, b]$ und $y, z \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|.$$

Satz 2.5 (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung)

Erfüllt $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-Bedingung zu $L > 0$, dann existiert auf dem Intervall $[a, b]$ eine eindeutige Lösung $y(x)$ mit $y(a) = y_0$.

Bemerkung:

- für einige Fälle lassen sich analytische Lösungen finden
- Ansätze sind Variablentrennung, homogene Lösungen, exp-Ansatz, Bernoulli, ...
- Unbekannte $y(x)$ kann auch vektorwertig sein (siehe Räuber-Beute-Systeme)

Variablentrennung:

- für Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

- Lösung definiert durch

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

Beispiel:

- gesucht ist die Lösung von $y' = xy$
- Variablentrennung führt zu

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

$$\ln |y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = Ke^{\frac{1}{2}x^2}$$

Inhomogene Gleichung

$$y'(x) = f(x)g(y) + h(x)$$

Lösungsstrategie:

- zunächst die homogene Gleichung lösen, dies führt auf $y_h(x)$
- anschließend eine Partikularlösung $y_p(x)$ bestimmen
- dazu in $y_h(x)$ die Konstante $C = C(x)$ setzen und erneut lösen
- allgemeine Lösung ist dann

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

- anschließend ggf. die Konstante mittels des Anfangswertes bestimmen

Beispiel 3

Die Differentialgleichung $K'(t) = pK(t) + E$ ist für $E \neq 0$ inhomogen. Die homogene Gleichung lautet

$$K'(t) = pK(t)$$

und besitzt die allgemeine Lösung $K(t) = C \exp(pt)$.

Bestimmung einer Partikularlösung mittels $K(t) = K_p$. Dies führt auf

$$\begin{aligned} K_p'(t) &= 0, & 0 &= pK_p + E = pK_p + E \\ K_p &= -E/p. \end{aligned}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(t) = C \exp(pt) - \frac{E}{p}.$$

Der Anfangswert $y(0) = K_0$ führt auf die Lösung

$$y(t) = \left(K_0 + \frac{E}{p}\right) \exp(pt) - \frac{E}{p}.$$

Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = ay' + by$$

Ansatz:

$$y(t) = \exp(\lambda t)$$

Einsetzen ergibt:

$$\lambda^2 y(t) - a\lambda y(t) - by(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

Lösen der charakteristische Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

Allgemeine Lösung der DGL:

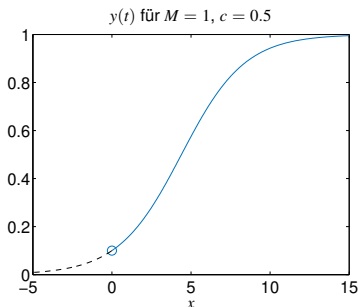
$$y(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$$

Logistische Gleichung:

- Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = cy(t)(M - y(t))$$

- Modellierung von Wachstumsprozessen
- Spezialfall von Variablentrennung
- bedeutsam für Anwendungen etwa in der Ökonomie



Erweiterungen:

- Unbekannte $y(x)$ kann auch vektorwertig sein (siehe Räuber-Beute-Systeme)
→ System gewöhnlicher Differentialgleichungen (ODEs)
- ist die unabhängige Variable x ein Vektor (z. B. Black-Scholes-Formel)
→ partielle Differentialgleichung (PDE)
- kommen höhere Ableitungen vor
→ Umformung zu System von Gleichungen erster Ordnung (daher konzentriert man sich bei ODEs auf das Lösen von Systemen)

Gekoppelte System:

- typischerweise existieren Abhängigkeiten zwischen $y_1, \dots, y_n$
- anderenfalls ist das System entkoppelt
- u.U. lassen sich die DGL umformen und so entkoppeln

Räuber-Beute-Modelle:

- zwei Größen, $x(t)$ (Beutetiere) und $y(t)$ (Räuber)
→ Zustand (x, y) hängt von der Zeit t ab
- je eine Wachstumsgeschwindigkeit gegeben
- ohne Räuber wachsen die Beutetiere ungehemmt
- ohne Beute verkümmert die Räuberpopulation
- Auftreten beider Populationen führt zu Zuwächsen bei Räubern und Abgängen bei der Beute
- Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t),$$

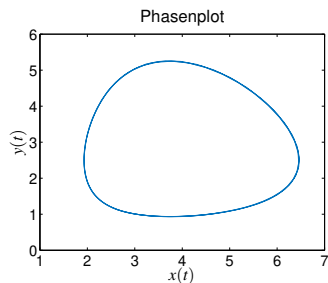
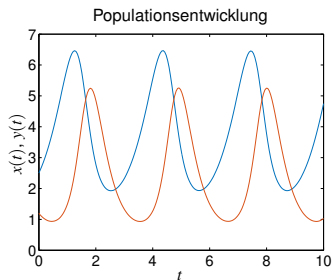
$$\dot{y}(t) = cx(t)y(t) - dy(t)$$

A. J. Lotka: *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins, Baltimore, 1925.

V. Volterra: *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Mem. Acad. Lincei Roma 2, 31–113, 1926.

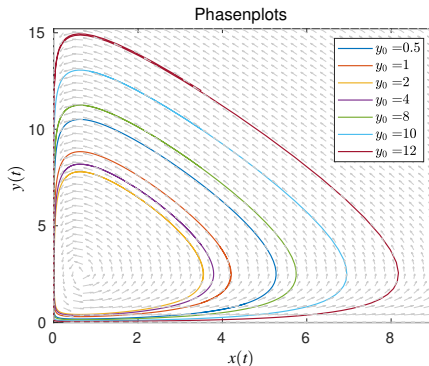
Beispiel:

- Parameter: $a = 1.5$, $b = 0.6$, $c = 0.8$, $d = 3.0$
- Anfangswerte $x(0) = 2.5$, $y(0) = 1.2$



Einfluss der Anfangswerte:

- Parameter bestimmen das Gleichgewicht und das Verhalten
- Anfangswerte bestimmen nur das Verhalten
- ungünstige Anfangswerte können zum Aussterben führen
- Ergebnisse für $a = 1.5$, $b = 0.6$, $c = 0.8$, $d = 0.5$ sowie $x(0) = 3.5$

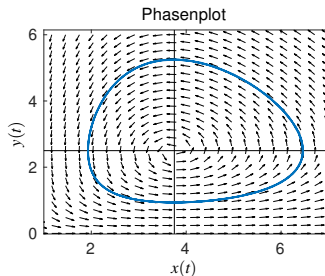


Gleichgewichtslösung:

$$0 = \dot{x} \Rightarrow x(a - by) = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{b},$$

$$0 = \dot{y} \Rightarrow y(cx - d) = 0 \Rightarrow x = \frac{d}{c}$$

- die Gleichgewichtslösung ist demnach $(x^*, y^*) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$
- für $a = 1.5, b = 0.6, c = 0.8, d = 3.0$ also $(x^*, y^*) = (2.5, 2.75)$



Goodwin-Modell:

- Wechselspiel zwischen Beschäftigungsgrad $v(t)$ und Lohnquote $u(t)$
- Wachstumsprozesse laufen im Hintergrund
- Wachstumsraten Arbeitsproduktivität und Erwerbsbevölkerung α, β
- Modellierung der Reallohnveränderung mittels γ, ρ
- Kapitalkoeffizient σ
- Zusammenhänge sind vereinfacht

$$\frac{\dot{v}}{v} = -\frac{1}{\sigma}u + \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta, \quad \frac{\dot{u}}{u} = \rho v - (\gamma + \alpha)u$$

Verbindung zu Volterra-Lotka:

- Beschäftigungsquote als Beute und Lohnquote als Räuber modelliert
- Differentialgleichungen

$$\dot{v} = -\frac{1}{\sigma}vu + \left(\frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta\right)v, \quad \dot{u} = \rho uv - (\gamma + \alpha)u$$

R. M. Goodwin: *A Growth Cycle*, in *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Ed. C. H. Feinstein, Cambridge University Press, 54–58, 1967.

Volterra-Lotka Modelle in der Ökonomie

Beschäftigungsgrad und Lohnquote:

- Parameter für die Modellierung

$$\alpha = 0.05, \beta = 0.01, \sigma = 10, \rho = 0.1, \gamma = 0.01$$

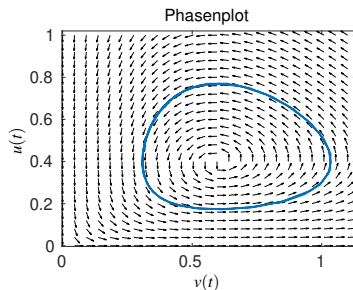
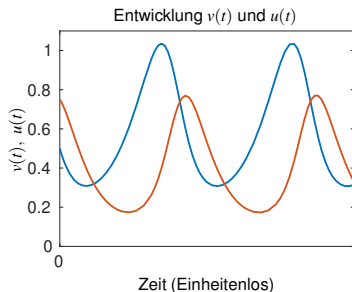
- Parameter im Volterra-Lotka-Modell

$$\dot{v} = av(t) - bv(t)u(t),$$

$$\dot{u} = cv(t)u(t) - du(t)$$

und also

$$a = \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta = 0.04, \quad b = \frac{1}{\sigma} = 0.1, \quad c = \rho = 0.1, \quad d = \gamma + \alpha = 0.06$$



Allgemeines System:

- ohne Festlegung der Vorzeichen der Parameter

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t),$$

$$\dot{y}(t) = cx(t)y(t) - dy(t)$$

- Räuber-Beute System für $b, c > 0$, damit indirekt $a, d > 0$
- Konkurrenz für $b > 0, c < 0$, damit indirekt $a > 0, d < 0$
- Synergie für $b < 0, c > 0$, damit indirekt $a < 0, d > 0$

Erweiterungen:

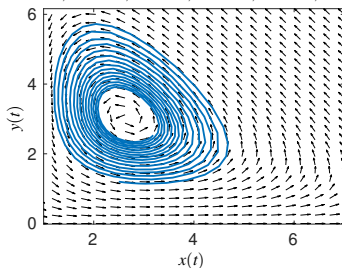
- Populationsgrenzen (Maxima)
- intraspezifische Konkurrenz
- Ortsabhängigkeit (lokale Vorteile für kleinere Unternehmen)
- mehr als zwei Anbieter

Marktwirtschaftliches Modell mit 2 Spezies:

- obere Grenzen K und L zur Regulierung
- Wahl der Parameter kann zu Dämpfung oder Eskalation führen

$$\dot{x} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy, \quad \dot{y} = cxy - dy\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$

$$a = 2.5, b = 0.6, c = 0.9, d = 3.0, K = 10, L = 15$$



Anfangswertprobleme:

- häufig nicht geschlossen lösbar
- numerische Approximation der Lösung

Diskretisierte Lösung:

- zur Lösung kontinuierlicher Modelle (Differentialgleichung, Differenzengleichungen)
- festlegen eines Gitters von Beobachtungszeitpunkten
- Abstand zwischen zwei Zeitpunkten sei h (Zeitschrittweite)

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

- Zuwachs von Zustandsgrößen wird als h mal Wachstumsgeschwindigkeit angesetzt

$$Y_{n+1} = Y_n + h \cdot f(x_n, Y_n) \tag{2}$$

- die Vorschrift aus (2) wird Euler-Verfahren genannt

Numerisches Verfahren:

- Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0$$

- Approximation $Y_i \approx y(x_i)$
- für äquidistantes Gitter gilt $x_i = a + i \cdot h$ mit $h = (b - a)/N$
- Initialisierung

$$Y_0 = y_0$$

- Iteration Euler Verfahren

$$Y_{i+1} = Y_i + h \cdot f(x_i, Y_i)$$

Heun-Verfahren:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2} \left(f(x_i, Y_i) + f(x_i + h, Y_i + h \cdot f(x_i, Y_i)) \right)$$

Definition 2.6 (Klassisches Runge-Kutta Verfahren, 1901)

Sei (x_ℓ, Y_ℓ) die aktuelle Iterierte. Das klassische 4-stufige Runge-Kutta-Verfahren besitzt die Form

$$K_1 = f(x_i, Y_i),$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}K_1\right),$$

$$K_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}K_2\right),$$

$$K_4 = f(x_i + h, Y_i + hK_3)$$

mit

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Bemerkungen:

- Verfahren 4. Ordnung, guter Kompromiss aus Aufwand und Genauigkeit
- häufig genutztes Verfahren für äquidistante Schrittweiten
- adaptive Wahl der Schrittweite zur Verbesserung der Näherungen

1. Differenzengleichungen
2. Differentialgleichungen
- 3. Lineare Algebra in der Ökonomie**
4. Lineare Optimierung und Dualität
5. Interpolation und numerische Differentiation
6. Fixpunktiterationen
7. Literatur

1. Differenzengleichungen
2. Differentialgleichungen
3. Lineare Algebra in der Ökonomie
 - 3.1 Page-rank-Algorithmus
 - 3.2 Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren
 - 3.3 Perron-Frobenius Theorie
 - 3.4 Weitere Anwendungen von Eigenwerten in der Ökonomie
 - 3.5 Symmetrisch positiv definite Matrizen
4. Lineare Optimierung und Dualität
5. Interpolation und numerische Differentiation
6. Fixpunktiterationen
7. Literatur

Aufgabenstellung:

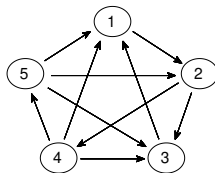
Ordne Internetseiten in Bezug auf Relevanz zu einen Suchbegriff.

Modellbildung:

- Popularitätswerte nach Anzahl von Links
- für Rangordnung sind die eingehenden links wichtig
- zusätzliche Gewichtung nach den Rangpositionen der Webseiten der eingehenden links
- rekursives Modell, Problem: Ränge der anderen Webseiten sind noch nicht bestimmt

Beispiel:

- 5 Seiten, Links wie folgt



Rekursives Modell:

- Übergangsmatrix A und gesuchte Popularitätswerte in x , sodass

$$x = Ax$$

- Übergangsmatrix mittels eingehender Links

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{kein Link von } j \text{ nach } i, \\ \frac{1}{\# \text{ von } j \text{ ausg. Links}} & \text{sonst} \end{cases}$$

L. Page, S. Brin: *Method for node ranking in a linked database*, Patent, 2001.

V. Shikhman: *Studienbücher Wirtschaftsmathematik Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Studienbücher Wirtschaftsmathematik, Springer Nature, Wiesbaden 2019.

Aufstellen der Übergangsmatrix:

- ein- und ausgehende Links

Webseite	1	2	3	4	5
raus	1	2	1	3	3
rein	3	2	3	1	1

- Übergangsmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

- Lösung $x \in \mathbb{R}^5$ mit $Ax = x$
- Eigenwertproblem.

1. Differenzengleichungen

2. Differentialgleichungen

3. Lineare Algebra in der Ökonomie

3.1 Page-rank-Algorithmus

3.2 Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren

3.3 Perron-Frobenius Theorie

3.4 Weitere Anwendungen von Eigenwerten in der Ökonomie

3.5 Symmetrisch positiv definite Matrizen

4. Lineare Optimierung und Dualität

5. Interpolation und numerische Differentiation

6. Fixpunktiterationen

7. Literatur

Idee:

- ordne einer quadratischen Matrix eine Kennzahl (keine Norm) zu
- Schreibweise $\det(A)$ oder auch $|A|$
- Determinanten lassen sich vielseitig im Umgang mit Matrizen nutzen,
- Nutzen etwa in Bezug auf Invertierbarkeit, ggf. Berechnung der Inversen, Lösung eines linearen Gleichungssystem

Formale Definition:

- mittels Summe über Produkte der Matrixelemente in allen möglichen Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ (Leibniz-Formel)
- Summe über insgesamt $n!$ Produkte mit je n Faktoren
- numerisch nicht stabil für große n

Beispiel 4

Für die einfachen Fälle mit $n \leq 3$ gelten

$$\det \left((a_{11}) \right) = |A| = a_{11},$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) &= |A| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Eigenschaften: (Auswahl)

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar,

$$\det(A) = \det(A^T),$$

$$\det(I_{n \times n}) = 1,$$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A),$$

Vertauschung zweier Zeilen (Spalten) A ändert das Vorzeichen von $\det(A)$

Entwicklungssatz: (Laplace)

- Zeile i und Spalte j in A zu streichen, führt auf die Adjunkte A_{ij}
- es gilt (Entwicklung nach Spalte j)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

bzw. (Entwicklung nach Zeile i)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Definition 3.1

Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ wird Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genannt, falls ein $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ existiert, mit

$$Ax = \lambda x.$$

Ein solches x wird Eigenvektor zum Eigenwert λ genannt.

Bemerkung 5

Sind $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und $\alpha \neq 0$, so ist auch αv ein Eigenvektor. Somit ergibt sich ein linearer Raum, der Eigenraum zum Eigenwert λ ,

$$\langle v \rangle = \{w \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ mit } w = \alpha v\}.$$

Einige Beispiele in der Ökonomie:

- Page-rank Algorithmus
- wirtschaftliche Verflechtungen in abgeschlossenen Systemen, Preisgleichgewichte
- Anteile für nachhaltige Kreislaufwirtschaft
- Einstellen von Marktanteilen/Kaufverhalten

Einige Beispiele außerhalb der Ökonomie:

- Klangkörper in der Musik
- Bau von Brücken (Einsturzvermeidung)
- Schwingungen von Bauteilen

Beispiel: Eigenschwingung eines Gitarrenkörpers

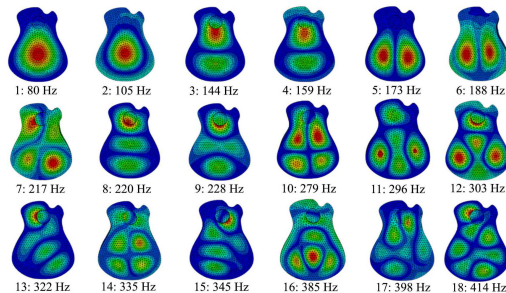


Figure 6. Mode shapes and natural frequency of guitar sound box.

J. Clinton, K. Wani, Open Journal of Acoustics 10(03): 41-50 (2020)

Bestimmung der Eigenwerte / Lösbarkeit:

- Umstellen führt auf

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_{n \times n})x = 0$$

- hat nichttriviale Lösung $x \neq 0$, falls

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Definition 3.2

Der Term $\det(A - \lambda I)$ ist ein Polynom vom Grad n und wird charakteristisches Polynom genannt. Die Eigenwerte von A sind also die Nullstellen von

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Bemerkungen:

- das charakteristische Polynom besitzt (Vielfachheiten mitzählen) exakt n Nullstellen (Fundamentalsatz der Algebra)
- Lösungen sind mglw. in $\mathbb{C}$ trotzdem, dass $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Beispiel 5

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 6 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 2 \end{aligned}$$

und die Eigenwerte sind folglich

$$\lambda_{1,2} = 2.5 \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 2} = 2.5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}.$$

Beispiel 6

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0.5, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 6

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix oder eine linksuntere oder rechtsobere Dreiecksmatrix, so stehen die Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen, denn für eine rechtsobere Dreiecksmatrix ist etwa

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = a_{ii} \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Diagonalisierung:

- mitunter ist es von Vorteil, eine Basis aus Eigenvektoren zu wählen
- dann ist die Abbildungsmatrix eine Diagonalmatrix
- hat A insgesamt n linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ und sei

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n}, T(:, i) = v_i$$

die Matrix dieser Eigenvektoren, dann ist

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonalen.

Bemerkungen:

- nicht jede Matrix ist diagonalisierbar
- jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar
- in vielen Anwendungen sind die Eigenvektoren selbst wichtiger als Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit.

Eigenraum:

- ist ein Eigenwert mehrfach, so kann es einen dazugehörigen Eigenraum mit Dimension > 1 geben
- Vielfachheit der Nullstelle = algebraische Vielfachheit
- Dimension des Eigenraums = geometrische Vielfachheit,

$$\text{algebraische Vielf.} \geq \text{geometrische Vielf.} \geq 1$$

Beispiel 7

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -1$ und die Eigenräume

$$V_{1,2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Beispiel 8

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

besitzt den Eigenwert $\lambda = 0$. Dieser besitzt die algebraische Vielfachheit 4 aber die geometrische Vielfachheit 1. Der Eigenraum ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Theoretisch:

- Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Praktisch:

- Bestimmung der λ_i mittels Determinanten nur bis $n \leq 4$ sinnvoll
- Berechnung von Nullstellen eines Polynoms vom Grad n für $n > 4$ nicht geschlossen möglich
- Berechnung von Nullstellen eines Polynoms anfällig für Störungen.

Ausweg:

- numerische Approximation der Eigenwerte und -vektoren
- einfachstes Verfahren ist die Potenzmethode

Potenzmethode (survival of the largest):

- wähle Startvektor $x \neq 0$ etwa $x = (1, \dots, 1)^T$, normiere x
- Iteration:

$$y := Ax$$

$$r := y^T x$$

$$x := y / \|y\|_2$$

- Abbruchkriterium etwa $\|rx - y\|_2 < \varepsilon = 10^{-7}$

Definition 3.3

Der Wert

$$r = \frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{y^T x}{1} = y^T x$$

ist eine Näherung für den betragsgrößten Eigenwert und wird Rayleigh-Quotient von x genannt. Weiter ist x eine Näherung an den zugehörigen Eigenvektor

Bemerkungen:

- die Normierung verhindert einen Überlauf
- Nachteile: u.U. rechenaufwendig, liefert nur den betragsgrößten EW
- für Wirtschaftswissenschaften interessiert häufig nur dieser
- häufig führen Anwendungen auf Situationen wie diese

Konvergenz:

- Voraussetzung ist, dass der betragsgrößte Eigenwert von A einfach ist
- r konvergiert gegen $\lambda_{\max}$ und x gegen einen zugehörigen Eigenvektor
- Konvergenzgeschwindigkeit hängt von $|\lambda_2/\lambda_1|$ ab

Alternatives Vorgehen für andere Norm:

$$r := \frac{y^T x}{x^T x}, \quad x := \frac{y}{\|y\|_1}$$

Aufstellen der Übergangsmatrix:

- ein- und ausgehende Links

Webseite	1	2	3	4	5
raus	1	2	1	3	3
rein	3	2	3	1	1

- Übergangsmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

- Lösung $x \in \mathbb{R}^5$ mit $Ax = x$
- Eigenwertproblem.

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -0.341 \pm 0.7668i, \quad \lambda_{4,5} = -0.1590 \pm 0.2315i$$

Eigenvektor:

$$\begin{pmatrix} 0.244 \\ 0.3 \\ 0.233 \\ 0.178 \\ 0.044 \end{pmatrix}$$

Ranking:

$$2, 1, 3, 4, 5$$

Fragen:

1. Gibt es in solchen Fällen immer einen Eigenwert $\lambda_{\max} = 1$?
2. Gibt es dazu immer einen Eigenvektor mit nichtnegativen Einträgen?

Abgeschlossenes Input-Output-Modell:

- Formulierung des Zusammenhangs zwischen Wirtschaftssektoren $x_1, \dots, x_n$
- Produktmengen x_i untereinander verflochten, keine externen Nachfragen
- Zusammenhang ist linear, also Matrix-Form

$$x = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a_{ij} \geq 0 \forall i, j$$

- a_{ij} gibt an, wieviel von Produkt x_j zur Herstellung von x_i benötigt wird
- es gibt eine Lösung, falls $\det(I_{n \times n} - A) \neq 0$

Offenes Input-Output-Modell:

- externe Nachfragen $d_1, \dots, d_n \geq 0$, Zusammenhang lautet

$$x = Ax + d$$

- Voraussetzung für die Existenz einer Lösung ist, dass $\det(I_{n \times n} - A) \neq 0$

W. W. Leontief: *Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States*, Rev Econ Stat 18(3), 105–125, 1936.

W. W. Leontief: *Interrelation of prices, output, savings, and investment*, Rev Econ Stat 19(3), 109–132, 1937.

Vereinfachtes Modell:

- Güter $G_1, \dots, G_n$ der Produzenten $P_1, \dots, P_n$ (Exklusivität)
- festgelegte Zeiteinheit (etwa 1 Jahr)
- Skalierung der Einheiten so, dass je genau ein Gut hergestellt wird
- Produzent P_i benötigt jeweils a_{ij} Einheiten von Gut G_j , also

$$G_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} G_j, \quad a_{ij} \geq 0$$

- abgeschlossenes Modell (kein Import/Export), alle Güter werden aufgebraucht

Definition 3.4

Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Tauschmatrix, wenn

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Bemerkung 7

Eine solche Matrix wird auch left-stochastic matrix genannt.

Satz 3.5

Die Matrix A zum obigen Modell ist eine Tauschmatrix.

Fragen:

Wie sind die Preise zu wählen?

Gibt es eine stabile Lösung (Preisverteilung)?

1. Differenzengleichungen

2. Differentialgleichungen

3. Lineare Algebra in der Ökonomie

3.1 Page-rank-Algorithmus

3.2 Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren

3.3 Perron-Frobenius Theorie

3.4 Weitere Anwendungen von Eigenwerten in der Ökonomie

3.5 Symmetrisch positiv definite Matrizen

4. Lineare Optimierung und Dualität

5. Interpolation und numerische Differentiation

6. Fixpunktiterationen

7. Literatur

Mathematisches Problem:

- gesucht ist eine Lösung von

$$Ax = x$$

- damit suchen wir einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ von A
- Anwendungen z. B. abgeschlossenes Input-output-Modell, Page-rank

Satz 3.6

Sei $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ eine Tauschmatrix. Es gelten:

1. Die Matrix A besitzt einen komponentenweise nichtnegativen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ und $\lambda = 1$ ist betragsgrößter Eigenwert von A .
2. Ist A irreduzibel, so hat der Eigenraum die Dimension 1. Die Lösung ist also bis auf Skalierung eindeutig.
3. Die Komponenten von x sind die Preise der einzelnen Güter in einem Gleichgewicht. Es gibt also eine stabilen Preisverteilung (Gleichgewicht).
4. Ist A irreduzibel, so konvergiert jede nichtnegative Preisverteilung gegen den Gleichgewichtspreis.

Definition 3.7

Für eine (möglicherweise nichtsymmetrische) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt $G_A = (V, E)$ der Adjazenzgraph mit der Menge der Knoten $V = \{1, \dots, n\}$ und der Menge der Kanten

$$E = \{(i, j) \in V^2 : a_{ij} \neq 0\}.$$

Definition 3.8

Eine Matrix A heißt irreduzibel (oder unzerlegbar), wenn jeder Knoten i durch eine Folge von Kanten mit jedem anderen Knoten j verbunden ist (im Falle einer nichtsymmetrischen Matrix durch eine Folge gleichorientierter Kanten).

Satz 3.9 (Satz von Perron-Frobenius)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ komponentenweise nichtnegativ und irreduzibel, dann gelten

1. Der betragsgrößte Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A ist einfach.
2. Dieser Eigenwert (und nur dieser) besitzt einen komponentenweise positiven Eigenvektor.

Folgerung aus Satz 3.9:

- ist A reduzibel, so gibt es einen zugehörigen Eigenvektor der komponentenweise „nur“ nichtnegativ ist
- betrachte dazu irreduzible Untermatrizen

Aussagen 1/2 aus Satz 3.6:

- sofern A reduzibel ist, so ist $x \geq 0$ andernfalls gilt $x > 0$ nach Perron-Frobenius
- es gilt $\lambda_{\max} = 1$, denn sei $x \geq 0$ ein Eigenvektor zu $\lambda_{\max}$, so gelten wegen $Ax = \lambda_{\max}x$ und $\sum_i a_{ij} = 1$ für alle j (A ist Tauschmatrix), dass

$$1^T Ax = 1^T (\lambda_{\max} x) = \lambda_{\max} 1^T x$$

$$1^T A = 1^T \quad \Rightarrow \quad 1^T x = \lambda_{\max} 1^T x \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\max} = 1$$

Aussage 4 aus Satz 3.6:

- sei $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ eine beliebige anfängliche Preisverteilung mit $x \geq 0$, $\|x\| > 0$
- als Iteration ergibt sich über die Zeit

$$x^{(i+1)} = Ax^{(i)}$$

- da $\lambda_{\max} = 1$ nach Perron-Frobenius einfach ist, sind alle anderen Eigenwerte betragsmäßig kleiner 1
- die Iteration entspricht der Anwendung der Potenzmethode und konvergiert gegen den Eigenvektor x zu $\lambda_{\max}$

1. Differenzengleichungen

2. Differentialgleichungen

3. Lineare Algebra in der Ökonomie

3.1 Page-rank-Algorithmus

3.2 Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren

3.3 Perron-Frobenius Theorie

3.4 Weitere Anwendungen von Eigenwerten in der Ökonomie

3.5 Symmetrisch positiv definite Matrizen

4. Lineare Optimierung und Dualität

5. Interpolation und numerische Differentiation

6. Fixpunktiterationen

7. Literatur

Modell

- geschlossene Ökonomie (Kühe, Kälber, Korn/Mais)
- Kühe haben begrenzte Lebenszeit, ohne Kühe keine Kälber
- ohne Korn kein neues Getreide, ohne Körner keine Nahrung für die Kühe und Kälber,
- ohne Kühe/Kälber keine Gülle und so weniger neues Korn

Gegenseitige Beeinflussung fürs neue Jahr (unkaliert, fiktive Werte)

$$\begin{pmatrix} x_{\text{Kühe}} \\ x_{\text{Kälber}} \\ x_{\text{Korn}} \end{pmatrix}^{(\text{neu})} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 & 3 \\ 0.2 & 0 & 1 \\ 1 & 0.05 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{Kühe}} \\ x_{\text{Kälber}} \\ x_{\text{Korn}} \end{pmatrix}^{(\text{alt})}$$

Gesucht:

- stabile Relationen (Anzahlen) und gleiche Überproduktion zum Verkauf
- maximaler Gewinn führt auf etwas anderes

Mathematisches Problem:

- Eigenwertproblem

$$Ax = \lambda x$$

- jährlich bleiben jeweils $\lambda - 1$ Einheiten zum Verkauf übrig
- vereinfachende Skalierungen, sodass Gewinne je Einheit gleich sind
- Gewinn ist also

$$(\lambda - 1)(x_{\text{Kühe}} + x_{\text{Kälber}} + x_{\text{Korn}}) = (\lambda - 1)\|x\|_1$$

Preise:

- Preise in Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ zusammengefasst
- Herstellungskosten sind $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = (Ax)_i$
- Annahme, jedes Gut wird einmal im Jahr hergestellt, die Einnahmen für Gut i sind also x_i

Stabilität:

$$Ax \leq x$$

Satz 3.10

Seien A eine Tauschmatrix und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Es gilt die Implikation

$$Ax \leq x \quad \Rightarrow \quad Ax = x.$$

Beweis zu Satz 3.10:

- angenommen, es gibt ein j mit $(Ax)_j < x_j$
- sei $1^T = (1, \dots, 1)$, dann folgt mit $1^T A = 1^T$, dass $1^T Ax = 1^T x$
- weiter gelten nach Voraussetzung $x \geq 0$ und $(Ax)_i \leq x_i$
- wäre nun tatsächlich $(Ax)_j < x_j$, so folgt wegen $(Ax)_i \leq x_i$, dass

$$\sum_{i=1}^n (Ax)_i = \sum_{i=1}^n x_i$$

nicht gelten kann

- dies wäre ein Widerspruch zur Annahme und es kann kein j geben mit $(Ax)_j < x_j$
- folglich gilt $Ax = x$

Offenes Input-Output-Modell:

- externe Nachfragen $d_1, \dots, d_n \geq 0$
- Zusammenhang ist linear, also in Matrix-Form

$$x = Ax + d, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a_{ij} \geq 0 \forall i, j$$

Frage:

Gibt es für jedes $d \in \mathbb{R}_+^n$ eine Lösung

$$x = \underbrace{(I_{n \times n} - A)}_B^{-1} d$$

mit $x_1, \dots, x_n \geq 0$?

Bemerkungen zum LGS:

- wegen $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ gilt

$$b_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j$$

- gilt $B^{-1} \geq 0$ komponentenweise, so ist $x_1, \dots, x_n \geq 0$ sofern $d_1, \dots, d_n \geq 0$
- $x_1, \dots, x_n \geq 0$ bedeutet, dass keine Importe nötig sind

Definition 3.11

Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt invers-positiv, wenn B^{-1} existiert und nur nichtnegative Einträge hat.

Satz 3.12

Folgende Aussagen sind äquivalent

- Für jedes $d \in \mathbb{R}_+^n$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Bx = d$ und x ist komponentenweise nichtnegativ.
- Die Matrix B ist invers-positiv.
- Alle n Hauptminoren von B sind positiv.

Eine solche Matrix wird auch als *M-Matrix* bezeichnet.

Definition 3.13

Seien B eine reelle $n \times n$ -Matrix und $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann wird

$$\det \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix}$$

der k -te Hauptminor von B genannt.

Beispiel 9

Die Matrix

$$B = I - \begin{pmatrix} 0.45 & 0.25 & 0.15 \\ 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.025 & 0.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.55 & -0.25 & -0.15 \\ -0.1 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.025 & 0.95 \end{pmatrix}$$

hat die Hauptminoren

$$0.55, \quad 0.525, \quad 0.354$$

und ist invers-positiv.

Modell:

- drei Produkte auf dem Markt (A, B, C) im Wettbewerb
- Wahrscheinlichkeiten, dass einem Kauf von Produkt X beim letzten mal zu einem Kauf von Produkt Y beim nächsten mal führt seien

Kauf A $\Rightarrow$ (0.9, 0.01, 0.01, 0.08)

Kauf B $\Rightarrow$ (0.01, 0.8, 0.06, 0.13)

Kauf C $\Rightarrow$ (0.1, 0.1, 0.7, 0.1)

kein Kauf $\Rightarrow$ (0.1, 0.2, 0.1, 0.6)

Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.01 & 0.1 & 0.1 \\ 0.01 & 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.01 & 0.06 & 0.7 & 0.1 \\ 0.08 & 0.13 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 8

Allgemein wird ein solches Modell als Markov-Kette bezeichnet.

E. Larek: *Lineare System in der Wirtschaft*, Peter Lang Inter. Verlag der Wissenschaften, Frankfurt a. M., 2009.

Anbindung I an Input-Output-Überlegungen:

- alle Einträge a_{ij} sind nichtnegativ, i.d.R. sogar positiv, und kleiner gleich 1
- insbesondere ist A eine Tauschmatrix
- für eine stabile Verteilung $x = (x_A, x_B, x_C, x_K)^T$ gilt

$$Ax = x$$

Eigenwertproblem zum Eigenwert $\lambda = 1$

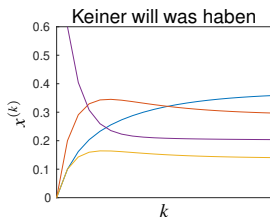
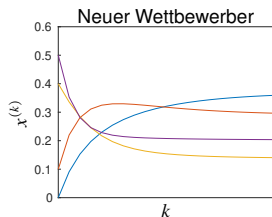
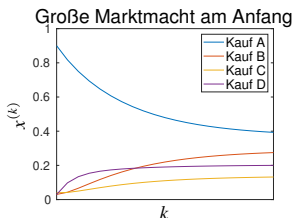
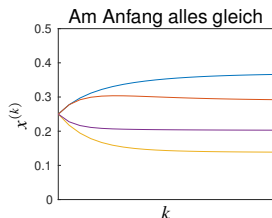
Anbindung II an Input-Output-Überlegungen:

- stabile Verteilung ist typischerweise nicht gesucht / nötig
- stabile Verteilung stellt sich mit der Zeit ein

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} = A^{(k+1)}x$$

- nach Perron-Frobenius und vorherigen Überlegungen konvergiert diese Folge für jede Anfangsverteilung gegen das Gleichgewicht

Verschiedene Anfangswerte:



→ alle führen auf dieselbe stabile Aufteilung (Gleichgewicht)

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1.0, \quad \lambda_2 = 0.858, \quad \lambda_3 = 0.655, \quad \lambda_4 = 0.487$$

Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.785 \\ 0.373 \\ 0.548 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6405 \\ -0.250 \\ -0.110 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -0.359 \\ -0.576 \\ 1 \\ -0.065 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -0.154 \\ -0.535 \\ -0.312 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung:

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sum_{j=1}^4 |v_{1j}|} = \begin{pmatrix} 0.369 \\ 0.290 \\ 0.138 \\ 0.203 \end{pmatrix}$$

1. Differenzengleichungen

2. Differentialgleichungen

3. Lineare Algebra in der Ökonomie

3.1 Page-rank-Algorithmus

3.2 Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren

3.3 Perron-Frobenius Theorie

3.4 Weitere Anwendungen von Eigenwerten in der Ökonomie

3.5 Symmetrisch positiv definite Matrizen

4. Lineare Optimierung und Dualität

5. Interpolation und numerische Differentiation

6. Fixpunktiterationen

7. Literatur

Rückblick Mathe I:

- Maximierung/Minimierung von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- hinreichende Bedingung für ein Maximum/Minimum

$f_{xx}(x^*, y^*) > 0$ und $(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)(x^*, y^*) > 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ ist lok. Minimum

$f_{xx}(x^*, y^*) < 0$ und $(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)(x^*, y^*) > 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ ist lok. Maximum

$f_{xx}(x^*, y^*) \neq 0$ und $(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)(x^*, y^*) < 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ ist Sattelpunkt

$f_{xx}(x^*, y^*) = 0$ oder $(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Definition 3.14

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit, wenn

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Gilt nur $x^T A x \geq 0$, so heißt A positiv semidefinit. Weiter heißt A indefinit, wenn

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0, y^T A y < 0$$

Satz 3.15 (Charakterisierung einer kritischen Stelle)

Seien x^* eine kritische Stelle von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $H_f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen. Es gelten

1. Ist $H_f(x^*)$ positiv definit, so hat f in x^* ein Minimum.
2. Ist $-H_f(x^*)$ positiv definit, so hat f in x^* ein Maximum.
3. Ist $H_f(x^*)$ indefinit, so hat f in x^* einen Sattelpunkt.

Überprüfen der Definitheit:

- seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deren Eigenwerte
- A ist positiv definit, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$
- A ist positiv semidefinit, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$
- A ist indefinit, wenn A positive und negative Eigenwerte hat
- A ist positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind
- $-A$ ist positiv definit, wenn alle ungeraden Hauptminoren von A negativ und alle geraden Hauptminoren von A positiv sind

Satz 3.16 (Beschränkung auf $n = 2$)

Seien x^* eine kritische Stelle von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $H_f(x) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen. In x^* hat f

1. ein lokales Minimum, falls $H_f(x^*)$ positiv definit ist (alle HM positiv),
2. ein lokales Maximum, falls $-H_f(x^*)$ positiv definit ist (1. HM negativ, 2. HM positiv),
3. einen Sattelpunkt, falls $H_f(x^*)$ indefinit ist (1. HM $\neq 0$, 2. HM negativ).

Portfoliooptimierung (Markowitz):

- Mischung verschiedener Aktien
- Gesamtbudget $g = 1$ wird auf p einzelne Aktien verteilt

$$x \in \mathbb{R}^p, \quad x_i \geq 0, \quad 1 = \sum_{i=1}^p x_i$$

- Verteilung zu Aktie i sei X_i mit Erwartungswert μ_i und Varianz σ_i^2
- Kovarianzmatrix zu den Verteilungen $X_1, \dots, X_p$

$$C \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad c_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j)$$

ist symmetrisch und positiv semidefinit

- Verteilung des neuen Portfolios z verhält sich wie

$$x_1 X_1 + \dots + x_p X_p$$

Beispiel für $p = 2$:

- Aufteilung $(\alpha, 1 - \alpha)$ zu $\alpha \in (0, 1)$ mit $Z \sim \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2$
- Erwartungswert und Varianz des gemischten Portfolios

$$\mu_z = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2, \quad \sigma_z^2 = \alpha^2\sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\text{Cov}(X_1, X_2)$$

- sind X_1 und X_2 nicht vollständig korreliert, so gilt $\text{Cov}(X_1, X_2) < \sigma_1\sigma_2$ und damit

$$\sigma_z^2 < \alpha^2\sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_1\sigma_2.$$

- somit verringerte Varianz des gemischten Portfolios, denn

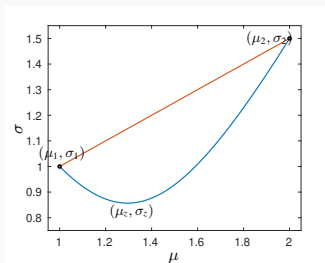
$$\sigma_z < \alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma_2$$

Beispiel 10

Wir betrachten die Konvexkombination zweier Aktien mit

$$\mu_1 = 1, \sigma_1 = 1, \mu_2 = 2, \sigma_2 = 1.5, \text{Cov}(X_1, X_2) = 0.1$$

und erhalten als Werte für die neuen Erwartungswerte und Varianzen:



*Die minimale Varianz erhalten wir für $\alpha^* \approx 0.705$ mit $\mu_z^* = 1.30$ und $\sigma_z^* = 0.86$.
→ Bedeutung der Risikostreuung.*

Erwartungswert und Portfoliovarianz im allgemeinen Fall:

$$\mu_z = x^T \mu, \quad \sigma_z^2 = x^T C x$$

Es gelten:

- ist C positiv definit, so existiert ein eindeutiges Minimum von $f(x) = x^T C x$
- zudem gilt, dass $f(x) > 0$, ein (Rest)risiko bleibt immer
- C ist positiv definit, sofern für je zwei Einzelverteilungen gilt

$$|\text{Cov}(X_i, X_j)| < \sigma_i \sigma_j,$$

je zwei Aktien dürfen nicht vollständig (anti)korreliert sein

→ Portfoliooptimierung benötigt positiv definite Matrix

Alternative Optimierungsaufgabe:

- Löse das Optimierungsproblem

$$x^T \mu \rightarrow \max!,$$

$$x^T C x \leq \sigma_0^2, \quad x \geq 0, \quad x_1 + \dots + x_p = 1$$

- in Worten: maximaler Ertrag zu gewählter Varianzobergrenze σ_0

Für die Werte aus Beispiel 10:

