Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 05.11.2025

2. Übung zur Vorlesung „Mathematische Methoden in den Wirtschaftswissenschaften“

Aufgabe 6:

Die Annahme einer relativen Wachstumsrate von $p \in \mathbb{R}$ führt auf die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = px(t).$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(b) Welche Lösung erfüllt die Bedingung $x(0) = 5$?

(c) Berechnen Sie weiter die Lösung der inhomogenen Gleichung $\dot{x}(t) = px(t) + 0.005$?

Aufgabe 7:

(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld von $y'(x) = -x/y$.

(b) Zeichnen Sie die Lösung, welche durch den Punkt $y(-1) = 0$ geht und bestimmen Sie die Lösung analytisch.
Bemerkung: Dies ist kein sinnvoller Anfangswert, da $\lim_{y \to 0} y'$ =NaN.

Aufgabe 8:

Approximieren Sie die Entwicklung einer Bevölkerung ohne Berücksichtigung von Zu- und Abwanderung. Nutzen Sie in der Modellierung eine Lebenserwartung von 70 Jahren.

(a) Gehen Sie von 2.3 Kindern pro Elternpaar aus.

(b) Nutzen Sie als Geburtenrate $\dot{x} = x(g_0 - s - bx)$ mit geeigneten Parametern $g_0, s, b \in \mathbb{R}_+$. Berechnen Sie $m = 3$ Schritte mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 0.5$.

Aufgabe 9:

Modellieren Sie das Wechselspiel zwischen Beschäftigungsgrad $v(t)$ und Lohnquote $u(t)$ mittels des Goodwin-Modells zu $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.01$, $\sigma = 10$, $\rho = 0.1$ und $\gamma = 0.01$.

(a) Nutzen Sie das Euler-Verfahren zur Approximation der Lösung. Wählen Sie $h = 0.1$ als Schrittweite und $t \in [0, 300]$ sowie die Anfangswerte $u(0) = 0.5$, $v(0) = 0.75$.

(b) Was wäre die Gleichgewichtslösung?

Aufgabe 10:

(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der logistischen Gleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t)(b - x(t))$$

für $a = b = 1$ sowie $(t, x) \in [0, 5] \times [0, 1.5]$.

(b) Seien $x(t)$ die Lösung der Differentialgleichung und t_0 deren Wendestelle. Zeigen Sie, ohne das Resultat von (c) zu nutzen, dass $x(t_0) = b/2$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$x(t) = \frac{b}{1 + Cb\exp(-abt)}$$

mit $C \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung löst.

Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 05.11.2025

Aufgaben zum Selbststudium & zusätzlichen Üben zur 2. Übung

Übungsaufgabe 1:

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = -2x\big(y(x)\big)^2$$

(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung für $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(c) Welche Lösung erfüllt den Anfangswert $y(0) = 1$?

(d) Welche Lösung erfüllt den Anfangswert $y(0) = -1$?

Übungsaufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die Lösungen der Volterra-Lotka-Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} ax(t) - bx(t)y(t) \\ cx(t)y(t) - dy(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

auf den Kurven

$$cx(t) - d\ln(x(t)) + by(t) - a\ln(y) = C$$

mit Konstanten $C \in \mathbb{R}$ liegen. Leiten Sie dazu (1) nach t ab und beachten Sie, dass $C' = 0$.

Übungsaufgabe 3:

Betrachten Sie das modifizierte SEIR-Modell (ohne Stufe E, dafür aber mit zeitlich begrenzter Immunität nach einer Infektion)

$$\begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\alpha SI + \beta R \\ \alpha SI - \gamma I \\ \gamma I - \beta R \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Gleichgewichtslösungen in Abhängigkeit von den Parametern.

Übungsaufgabe 4:

Dem Fadenpendel (Fadenlänge l, Masse m) liegt die Differentialgleichung

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

zugrunde. Für kleine φ gilt $\sin\varphi \approx \varphi$ und die Differentialgleichung lässt sich umformen zu

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi(t) = C\sin(\omega t + D)$ mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{g/l}$ die Differentialgleichung löst und bestimmen Sie die Konstanten so, dass $\varphi(0) = 0.2$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$.