Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 19.11.2025

3. Übung zur Vorlesung „Mathematische Methoden in den Wirtschaftswissenschaften“

Aufgabe 11:

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\sin(x)y(x), \quad x \in [0,\, 1], \\ y(0) &= \mathbf{e}. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie drei Iterationen mit dem Euler-Verfahren zu $h = 1/3$.

(b) Berechnen Sie einen Schritt mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zu $h = 1$.

(c) Berechnen Sie die Abweichungen zur analytischen Lösung $y(x) = \exp(\cos(x))$.

Aufgabe 12:

Das Abelson Modell befasst sich mit der Meinungsbildung einer Gruppe von $n \geq 2$ Menschen. Der einfache Fall eines Paares führt auf

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(y - x), \\ \dot{y}(t) &= b(x - y) \end{aligned}$$

mit x, und y Werten für die Meinungen und $a, b \geq 0$, $a + b > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 + C_2 \exp(-(a + b)t), \\ y(t) &= C_1 - C_2 \frac{b}{a} \exp(-(a + b)t) \end{aligned}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung löst.

Aufgabe 13:

Berechnen Sie die Determinanten von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1.5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1.5 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Welche der drei Matrzen sind invertierbar?

Aufgabe 14:

Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen A und C aus Aufgabe 13.

Aufgabe 15:

Wir betrachten ein stark vereinfachtes Modell zur demographischen Entwicklung unter Berücksichtigung von nur 2 Klassen: Arbeiter und Rentner. Das Modell lautet

$$\begin{pmatrix} A_{k+1} \\ R_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b - r & 0 \\ r & 1 - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie stabile Relationen zwischen A und R für $b = 3/40$, $r = 1/40$, $d = 1/10$.

(b) Was sind die zugehörigen Eigenwerte und welche Bedeutungen haben sie?

Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 19.11.2025

Aufgaben zum Selbststudium & zusätzlichen Üben zur 3. Übung

Übungsaufgabe 5:

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= -x \cdot y, \quad x \in [0,\, 1], \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie zwei Iterationen mit dem Euler-Heun-Verfahren zu $h = 0.5$.

(b) Berechnen Sie einen Schritt mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zu $h = 1$.

(c) Berechnen Sie drei Schritte zu $h = 1/3$ mit dem impliziten Verfahren

$$Y_{k+1} = Y_k + hf(x_{k+1}, Y_{k+1}).$$

Stellen Sie dazu jeweils die Gleichung nach der gesuchten neuen Iterierten Y_{k+1} um.

Übungsaufgabe 6:

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'(x) &= \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ 0.5(y_1 - y_2) \end{pmatrix}, \qquad x \in [0, 1], \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie zwei Schritte mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 0.5$.

Übungsaufgabe 7:

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen A und B.

(b) Geben Sie die charakteristischen Polynome zu A und B an.

(c) Berechnen Sie weiter die Eigenwerte von A und B.

Übungsaufgabe 8:

Berechnen Sie zu den Matrizen aus Aufgabe 7 jeweils einen Eigenvektoren zu je einem selbst gewählten Eigenwert.