

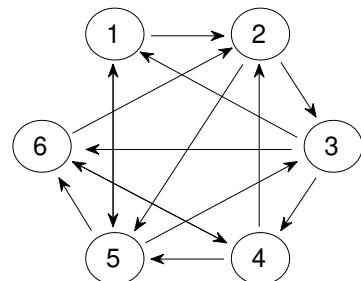
4. Übung zur Vorlesung „Mathematische Methoden in den Wirtschaftswissenschaften“

Aufgabe 16:

Gesucht ist eine Rangfolge von 6 websites, welche untereinander wie in der Abbildung rechts verlinkt sind.

Gehen Sie wie folgt vor:

- Geben Sie die Adjazenzmatrix der Verknüpfungen an.
- Approximieren Sie den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ mittels Potenzmethode (3 Schritte, Start mit $(1, \dots, 1)^T$ und ohne Normierung).
- Wie ist die Rangfolge der Websites?



Aufgabe 17

Vereinfachend seien die Zusammenhänge zwischen den drei Sektoren Industrie, Bildung und Verwaltung in einem abgeschlossenen System modelliert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die stabile Verteilung auf die Sektoren (Gleichgewicht).

Aufgabe 18:

Betrachten Sie für $\lambda > 0$ ein offenes Leontief-Modell der Form $x = \lambda Ax + y$ mit A der Tauschmatrix aus Aufgabe 17.

- Für welche $\lambda \in \{0.5, 0.7, 1\}$ ist die Matrix $B = I - \lambda A$ invers-positiv?
- Berechnen Sie die Lösung für die externe Nachfrage $y = (1, 2, 3)^T$ und $\lambda = 0.5$.

Aufgabe 19:

Die Funktion $f(x, y, z) = 3 - x^2 - 2xy - 2xz - 2y^2 - 3z^2 - x - z$ hat in $(-2, 1, 0.5)$ eine kritische Stelle. Um welche Art von Extremum handelt es sich?

Aufgabe 20:

Betrachten Sie einen Markt mit 3 Bäckereien. Die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Kauf bei Bäcker X zu einem Kauf bei Bäcker Y beim nächsten Einkauf seien wie folgt

$$\text{Kauf A } \Rightarrow (0.8, 0.15, 0.05)$$

$$\text{Kauf B } \Rightarrow (0.2, 0.65, 0.15)$$

$$\text{Kauf C } \Rightarrow (0.1, 0.05, 0.85)$$

Welche Marktaufteilung stellt sich im Grenzwert ein (Gleichgewicht)?

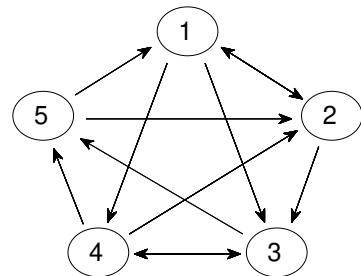
Wenden Sie die Potenzmethode an und berechnen Sie die Verteilungen der ersten 10 Iterationen bei einer Anfangsverteilung von $(1/3, 1/3, 1/3)$. Nutzen Sie zur internen Normierung der Iterationen der Potenzmethode die $\|\cdot\|_1$ -Norm mit $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$.

Aufgaben zum Selbststudium & zusätzlichen Üben zur 4. Übung

Übungsaufgabe 9:

Gegeben sind 5 websites, die untereinander wie in der Abbildung rechts verlinkt sind.

- Geben Sie die Adjazenzmatrix der Verknüpfungen an.
- Approximieren Sie den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ mittels Potenzmethode. Führen Sie 2 Schritte aus, nutzen Sie $(1, \dots, 1)^T$ als Startvektor und rechnen Sie ohne Normierung.
- Welche Rangfolge der 5 websites ergibt sich mit der Approximation aus (b)?



Übungsaufgabe 10:

Untersuchen Sie, für welche $\lambda \in \{0.5, 1\}$ die Matrix $I - \lambda A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$$

invers-positiv ist.

Berechnen Sie die Lösung x für das offene Leontief-Modell $x = \lambda Ax + y$ zu $\lambda = 0.5$ und die externe Nachfrage $y = (3, 13, 14)^T$.

Übungsaufgabe 11:

Berechnen Sie von der Funktion

$$f(x, y, z) = 3xy - x^3 + 9x + xz + 5y^2 + \frac{1}{6}z^2$$

die kritischen Punkte und überprüfen Sie, ob lokale Extremstellen vorliegen.

Übungsaufgabe 12:

Die Anbieter A, B und C stehen in Konkurrenz zueinander. Die Übergangswahrscheinlichkeiten, dass ein Kauf bei Anbieter X beim nächsten Mal zu einem Kauf bei Y bzw. keinem erneuten Kauf führt, lauten

- Kauf A $\Rightarrow (0.7, 0.1, 0.15, 0.05)$
- Kauf B $\Rightarrow (0.2, 0.6, 0.1, 0.1)$
- Kauf C $\Rightarrow (0.05, 0.1, 0.8, 0.05)$
- kein Kauf $\Rightarrow (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$

Bestimmen Sie eine Approximation an die Marktaufteilung im Gleichgewicht. Berechnen Sie dazu 2 Schritte mit der Potenzmethode zu der Anfangsverteilung $(0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$.