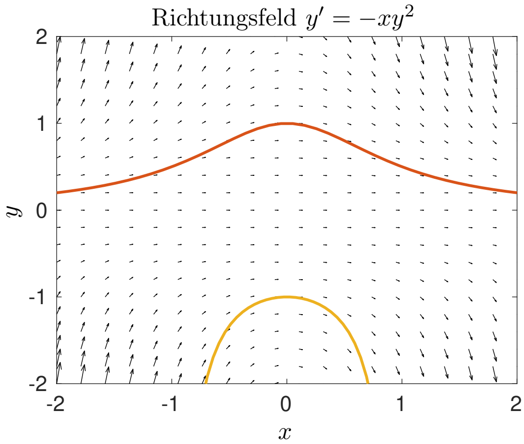
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Dr. M. Sawall

Rostock, den 10.11.2025

Lösungsvorschläge zum Selbststudium & zusätzlichem Üben zur 2. Übung
zur Vorlesung „Mathematische Methoden in den Wirtschaftswissenschaften“

Lösung zur zusätzlichen Übungsaufgabe 1:

(a) Das Richtungsfeld und die beiden Lösungen der Aufgabenteile c) und d)



(b) Die allgemeine Lösung lässt sich wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int -2x\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = -x^2 + C \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x^2+\tilde{C}}. \end{aligned}$$

(c) Zu dem Anfangswert $y(0) = 1$ lautet die Lösung

$$1 = \frac{1}{0^2+\tilde{C}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{C} = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

(d) Zum Anfangswert $y(0) = -1$ hat die Lösung eine gänzlich andere Gestalt, denn

$$-1 = \frac{1}{0^2+\tilde{C}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{C} = -1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x^2-1},$$

welche mit $y(0) = -1$ nur auf $(-1, 1)$ definiert ist.

Lösung zur zusätzlichen Übungsaufgabe 2:

Zunächst leiten wir die Gleichung

$$cx(t) - d\ln(x(t)) + by(t) - a\ln(y) = C$$

nach t ab und erhalten wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C = 0$ so

$$cx' - d\frac{x'}{x} + by' - a\frac{y'}{y} = 0.$$

Einsetzen der Terme der Differentialgleichung $x' = ax - bxy$ und $y' = cxy - dy$ ergibt

$$\begin{aligned} &c(ax - bxy) - d(a - by) + b(cxy - dy) - a(cx - d) = 0 \\ &cax - cbxy - da + dby + bcxy - bdy - acx + ad = 0, \end{aligned}$$

was korrekt ist. Somit erfüllen die Lösungen auf den Kurven die Differentialgleichung.

Lösung zur zusätzlichen Übungsaufgabe 3:

Für eine Gleichgewichtslösung gilt $S' = I' = R' = 0$. Dabei ergibt

$$0 = I' = \alpha SI - \gamma I = I(\alpha S - \gamma) \quad \Rightarrow \quad S^* = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Weiter gelten

$$\beta R = \alpha SI = \alpha\frac{\gamma}{\alpha}I = \gamma I$$

wegen $S' = 0$ und

$$\gamma I = \beta R$$

wegen $R' = 0$. Somit gilt für I und R im Gleichgewicht das Verhältnis

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{I^*}{R^*}.$$

Lösung zur zusätzlichen Übungsaufgabe 4:

Es gelten

$$\dot\varphi = \omega C\cos(\omega t + D), \qquad \ddot\varphi = -\omega^2 C\sin(\omega t + D)$$

sowie damit

$$\ddot\varphi = -\frac{g}{l}\varphi.$$

Mittels der Anfangswerte ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \dot\varphi(0) = \omega C\cos(0 + D), \\ 0.2 &= \varphi(0) = C\sin(0 + D), \end{aligned}$$

was für $C = 0.2$ und z.B. $D = \pi/2$ erfüllt ist.