

## Modulprüfung Numerische Mathematik und Stochastik für Ingenieurwissenschaften

Bitte heften Sie dieses Blatt vorne an Ihre Lösungen an.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 7 Punkte	Aufgabe 2 6 Punkte	Aufgabe 3 6 Punkte	Aufgabe 4 6 Punkte	Summe 25 Punkte

Aufgabe 1 (7 Punkte):

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \exp(-x).$$

- Approximieren Sie  $f'(1)$  mittels der zentralen Differenz und  $f''(1)$  mittels der zentralen Differenz zweiter Ordnung zu  $h = 0.01$ .
- Berechnen Sie eine Approximation an  $\int_0^4 f(x) dx$  mittels der zusammengesetzten Simpson-Regel zu  $n = 4$ .
- Wie groß ist  $n$  zu wählen, um bei der zusammengesetzten Simpson-Regel eine Abweichung vom exakten Wert zu erhalten, der kleiner als  $10^{-3}$  ist?
- Berechnen Sie eine Approximation an  $\int_0^4 f(x) dx$  mittels Gauß-Quadratur zu  $m = 1$ .

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'(x) &= x + y(x), \quad x \in [0, 1], \\y(0) &= 1.\end{aligned}$$

- Wenden Sie das Euler-Heun-Verfahren zur Schrittweite  $h = 0.5$  an und berechnen Sie zwei Schritte.
- Berechnen Sie einen Schritt mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zu  $h = 1$ .

Aufgabe 3 (6 Punkte):

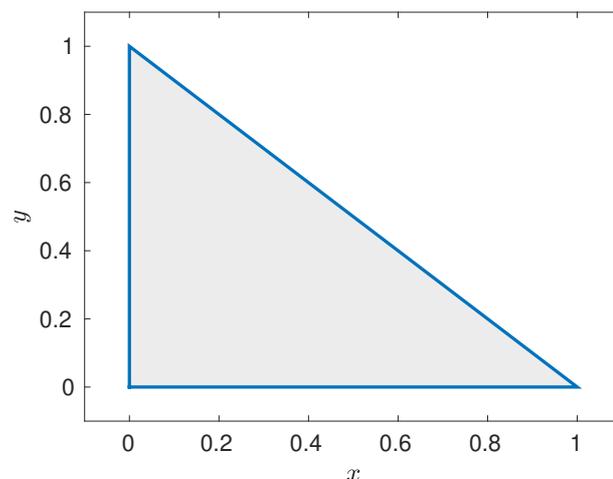
Gegeben sind das Gebiet

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < x < y\}$$

sowie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= 1 \quad \text{für } (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= x \quad \text{für } (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

- (a) Skizzieren Sie ein Gitter der Gitterweite  $h_x = h_y = 0.2$  in die folgende Abbildung und numerieren Sie die sechs Knoten.



- (b) Geben Sie für zwei der Knoten die Gleichungen zur Approximation der Lösung in den Gitterpunkten an.  
(c) Bestimmen Sie die Gleichung, die sich für den Knoten  $(0.4, 0.2)$  ergibt, wenn die Differentialgleichung

$$-\Delta u(x, y) + u_x = 1$$

lautet und die zentrale Differenz zur Approximation von  $u_x$  genutzt wird.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Gesucht sind Approximationen an die Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie zwei Schritte mit dem Gesamtschrittverfahren zu  $x^{(0)} = (2, 1, 0)^T$ .  
(b) Was können Sie allein anhand der Matrix  $A$  über die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens gegen die exakte Lösung für dieses Beispiel sagen?  
(c) Geben Sie die Fehlerfortpflanzungsmatrix des Gesamtschrittverfahrens für dieses Gleichungssystem an.