

Modulprüfung Numerische Mathematik und Stochastik für Ingenieurwissenschaften

Bitte heften Sie dieses Blatt vorne an Ihre Lösungen an.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 7 Punkte	Aufgabe 2 6 Punkte	Aufgabe 3 5 Punkte	Aufgabe 4 7 Punkte	Summe 25 Punkte

Aufgabe 1 (7 Punkte):

Bestimmen Sie Näherungen an den Schnittpunkt x^* der Funktionen

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad g(x) = x - \frac{\pi}{2}.$$

- (a) Betrachten Sie zunächst die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ mit $\varphi(x) = \sin(x) + \pi/2$. Überprüfen Sie, ob die Funktion $\varphi(x)$ auf dem Intervall $I = [2, 2.5]$ die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt.
- (b) Berechnen Sie 2 Iterationen der Fixpunktiteration aus (a) zu $x_0 = 2.3$.
- (c) Nutzen Sie eine a-posteriori Abschätzung zur Bestimmung, wie groß der Abstand der letzten Näherung aus (b) zum exakten Wert x^* maximal noch ist.
- (d) Berechnen Sie eine Approximation an x^* mittels des Newton-Verfahrens. Stellen Sie eine geeignete Nullstellengleichung auf und berechnen Sie einen Schritt zu $x_0 = 2.3$.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

- (a) Berechnen Sie Approximationen an $f'(0.5)$ und $f''(0.5)$ mittels der zentralen Differenz bzw. der zentralen Differenz zweiter Ordnung für $h = 0.01$
- (b) Berechnen Sie mittels der zusammengesetzten Simpson-Regel S_4 zu $n = 4$ eine Approximation an

$$I = \int_0^2 f(x) \, dx.$$

- (c) Wie hoch müsste n gewählt werden, um den Fehler der Approximation sicher unter 10^{-4} zu halten? Nutzen Sie, dass $\max_{x \in [0,2]} |f^{(4)}(x)| = 24$.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}, \quad x \in [0, 1],$$
$$y(0) = 1.$$

- (a) Berechnen Sie 3 Schritte mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$.
- (b) Berechnen Sie einen Schritt mit der Schrittweite $h = 1$ und dem Verfahren zum Butcher-Diagramm

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}.$$

Aufgabe 4 (7 Punkte):

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.35 \end{pmatrix}.$$

- (a) Approximieren Sie die Lösung mittels zweier Iterationen des Gesamtschrittverfahrens zum Startvektor $x^{(0)} = (0.5, 0.4, 0.3)^T$.
- (b) Berechnen Sie einen Schritt mit dem Einzelschrittverfahren zu $x^{(0)}$ aus (a).
- (c) Geben Sie für dieses Gleichungssystem die Fehlerfortpflanzungsmatrix des Gesamtschrittverfahrens an.