Universität Rostock
Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften
Klausur 13.02.2023

Gruppe B

Aufgabe B1 (3 Punkte):

Das Angebot an grünem Wasserstoff steigt seit Jahren. Das Angebot eines Jahres setzt sich jeweils wie folgt zusammen: Wegen der immer weiter ausgebauten Infrastruktur werden stets 110% der erzeugten Menge vom Vorjahr generiert. Aufgrund lange dauernder zweijähriger Wartungen der Anlagen fallen 2% der erzeugten Menge von vor zwei Jahren weg.

(a) Stellen Sie eine Rekursion für das Angebots an grünem Wasserstoff a_k im Jahr k auf.
(b) Berechen Sie ausgehend von $a_{2020} = 78$ und $a_{2021} = 85.8$ den Wert a_{2023}.
(c) Geben Sie die charakteristische Gleichung der Rekursion an.

Aufgabe B2 (4 Punkte):

(a) Berechnen Sie alle kritischen Stellen von $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 20x - 14y + 1$.
(b) Überprüfen Sie die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums mittels der Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen. Welche Art von Extremum liegt vor?

Aufgabe B3 (4 Punkte):

Bestimmen Sie zur Nachfrage $N(p) = 12/(p^2 + 8)$ und zum Angebot $A(p) = \exp(0.25p) - 1$ den Gleichgewichtspreis p^* mit $A(p^*) = N(p^*)$. Das gesuchte p^* liegt im Interval $I = [2, 3]$.

(a) Stellen Sie dazu eine geeignete Funktion auf, deren Nullstelle p^* liefert.
(b) Nutzen Sie das Bisektionsverfahren (führen Sie 3 Schritte aus, startend mit I).
(c) Nutzen Sie das Newton-Verfahren (führen Sie 1 Schritte aus, startend mit $p = 2.5$).

Aufgabe B4 (5 Punkte):

(a) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 19 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

(b) Welchen Rang hat die Matrix A?
(c) Geben Sie die Lösungsmenge für $Ax = b$, unter der Restriktion $x \geq 0$, an.

Aufgabe B5 (4 Punkte):

Für die Produktion werden die beiden Rohstoffe x_1 und x_2 benötigt. Lagermöglichkeiten und Liquidität führen auf die Beschränkungen

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq 3 & \\ & & x_2 & \leq 7 & . \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq 10 & \end{array}$$

Bei der Verarbeitung von Rohstoffmengen x_1 und x_2 ergibt sich ein Gewinn von $4x_1 + x_2$.

(a) Skizzieren Sie den zulässigen Bereich des Optimierungsproblems.
(b) Für welche Wahl von (x_1, x_2) wird der Gewinn maximal?