Universität Rostock
Institut für Mathematik

Rostock, 20.02.2024

Modulprüfung
Numerische Mathematik für Ingenieure

(Prüfungszeit 72 min.)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wenden Sie das Jacobi-Verfahren zum Startvektor $x^{(0)} = (2, -1, 2)^T$ an und berechnen Sie zwei Schritte.

(b) Konvergiert die Jacobi-Iteration für dieses Gleichungssystem gegen die exakte Lösung x^* von $Ax = b$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie die Fehlerfortpflanzungsmatrix des Jacobi-Verfahrens für dieses Gleichungssystem.

Hinweis: Für eine Diagonalmatrix $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ mit $\prod_{i=1}^n b_i \neq 0$ gilt $B^{-1} = \operatorname{diag}(b_1^{-1}, \ldots, b_n^{-1})$.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreise zu A.

(b) Berechnen Sie zwei Schritte der Potenzmethode zum Startvektor $x^{(0)} = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^T$. Geben Sie für die letzte Iterierte den Rayleigh-Quotienten an.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (\cos(x))^2.$$

(a) Bestimmen Sie eine Approximation an $f''(\pi/2)$ mittels zentraler Differenz und $h = 0.01$.

(b) Berechnen Sie mittels der zusammengesetzten Trapezregel zu $n = 2$ und $h = \pi/2$ einen Näherungswert für

$$I = \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Nutzen Sie zur Approximation von I die Gauß-Quadratur mit $m = 1$ und $h = \pi$.

(d) Wie groß ist n bei der zusammengesetzten Trapezregel zu wählen, um einen Fehler kleiner als 10^{-3} zu erhalten?

HINWEIS: Es gilt

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} \left| f^{(2)}(x) \right| \leq 2.$$

Aufgabe 4 (7 Punkte):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2y(x) \cdot (x+1), \qquad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie mit der Schrittweite $h = 0.5$ zwei Schritte mit dem expliziten Euler-Verfahren.

(b) Berechnen Sie mit der Schrittweite $h = 0.5$ zwei Schritte mit dem impliziten Euler-Verfahren. Dieses ist definiert durch die Verfahrensvorschrift

$$Y_{k+1} = Y_k + hf(x_{k+1}, Y_{k+1}).$$

(c) Nutzen Sie das Verfahren mit dem Butcher-Diagramm

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

und berechnen Sie einen Schritt zur Schrittweite $h = 1$.

Aufgabe 5 (5 Punkte):

Gesucht ist eine Lösung $f(x, y) = (0, 0)$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} xy - \exp(y) \\ \sin(x) + xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie einen Schritt mit dem Newton-Verfahren zum Startwert $(x_0, y_0) = (-2, -0.5)^T$.