Mathematische Methoden in den Wirtschaftswissenschaften.

Mathias Sawall

Institut für Mathematik, Universität Rostock

WS 2023/2024

Struktur der Lehrveranstaltung

Wichtige und i.d.R. neue Themen sind etwa:

- Differenzengleichungen
- Differentialgleichungen, analytische und numerische Lösung
- Determinanten, Eigenwerte und -vektoren
- Simplex-Algorithmus und Dualität
- logistische Gleichung (Fixpunkte und deren Stabilität)

Konkrete Anwendungen:

- Modellierung dynamischer Systeme, Marktsituationen, Konkurrenz, Kaufoptionen
- Page-rank Algorithmus (Suchmaschinen), geschlossene Wirtschaftssysteme, Leontief-Modelle, nachhaltige Gleichgewichte, Kaufverhalten
- Transportproblem, Logistik
- Support vector machines, automatisiertes Klassifizieren, maschinelles Lernen

Übersicht

Übersicht

Differenzengleichung

Fiboniacci-Folge:

- Rekursion

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

- Anfangswerte $a_0 = a_1 = 1$
- Kombination aus Rekursion und Anfangswerten definiert die gesamte Folge

Lösung:

- geometrischer Ansatz $\quad a_n = z^n,$
- Einsetzen in die Rekursionsformel führt auf die charakteristische Gleichung

$$z^2 - z - 1 = 0$$

- deren Lösungen sind

$$z_1 = 1 + \sqrt{5}/2, \quad z_2 = 1 - \sqrt{5}/2$$

- allgemeine Bildungsvorschrift hat die Form

$$a_n = cz_1^n + dz_2^n.$$

Bestimmung der Konstanten:

- Bestimmung von c und d mittels der Startwerte $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$

$$a_n = cz_1^n + dz_2^n$$

- lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 &= cz_1^1 + dz_2^1 \qquad \to \qquad 1 = c(1+\sqrt{5}/2) + d(1-\sqrt{5}/2), \\ a_2 &= cz_1^2 + dz_2^2 \qquad \to \qquad 1 = c(1+\sqrt{5}/2)^2 + d(1-\sqrt{5}/2)^2 \end{aligned}$$

führt auf $\quad c = \sqrt{5}/5, \quad d = -\sqrt{5}/5,$

- explizite Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Differenzengleichung

Bemerkungen:

- Grad charakteristischer Gleichung = Rekursionstiefe = Anzahl nötiger Startwerte
- selbes Prinzip zur Lösung bei allen linearen Differenzengleichungen
- allgemeine Form einer homogene Differenzengleichung

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{n-i}, \qquad \text{Anfangsstück } a_1, \ldots, a_k \text{ gegeben}$$

Inhomogen Differenzengleichung:

- häufig enthalten Differenzengleichungen Absolutglieder (inhomogen)
- Beispiele aus Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften
- drei einfache Beispiele sind

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0.3a_n + 1, \\ b_{n+1} &= 300 + 0.3b_n + 0.12b_{n-1}, \\ c_{n+1} &= 5 + 1.05c_n \end{aligned}$$

- gesucht ist explizite Bildungsvorschrift $a_n = a(n)$

Lösung inhomogener Differenzengleichungen

Ansatz:

- allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$a(n) = a_h(n) + a_p(n)$$

- $a_h(n)$ ist allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzengleichung
- $a_p(n)$ ist eine (!) partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung
- Berechnung der Konstanten wieder mittels der Anfangswerte

Parallele:

- Lösung eines unterbestimmten inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = b, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \mathrm{rg}(A) < n$$

- Lösung des homogenen Systems $Ax = 0$ lautet

$$L = \ker(A) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r\}$$

- eine spezielle Lösung $Ax_p = b$ führt auf die allgemeine Lösung (Lösungsmenge)

$$M = x_p + \ker(A), \qquad x = x_p + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r.$$

Lösung inhomogener Differenzengleichungen

Beispiel:

$$a_{n+1} = 5 + 1.05a_n$$

Lösung der homogenen Differenzengleichung:

- die homogene Gleichung lautet $a_{n+1} = 1.05a_n$
- die charakteristische Gleichung ist $z - 1.05 = 0$
- allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$a_h(n) = c1.05^n$$

Lösung des inhomogenen Teils:

- eine spezielle Lösung wäre hier eine Konstante $a_n = d$
- einsetzen ergibt

$$a_{n+1} = d = 5 + 1.05a_n = 5 + 1.05d \quad \Rightarrow \quad -0.05d = 5 \quad \Rightarrow \quad d = -100$$

- allgemeine Lösung hat die Form

$$a_n = c1.05^n - 100$$

- Anfangswert führt auf die Konstante c

Lösung inhomogener Differenzengleichungen

Beispiel:

- für den Anfangswert $a_1 = 5$ ergibt sich

$$a_1 = 5 = c \cdot 1.05^1 - 100,$$
$$c = \frac{105}{1.05} = 100$$

- explizite Bildungsvorschrift lautet in diesem Fall

$$a_n = a(n) = 100(1.05^n - 1), \qquad a_{123} \approx 40291.$$

Bemerkung 1

Ist $z = 1$ die Lösung der charakteristischen Gleichung, so ist die Berechnung einer partikulären Lösung so nicht möglich (Division durch 0). Die Reurksion hat die Form

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Die Lösung ist in diesem Fall trivial und die explizite Bildungsvorschrift lautet

$$a(n) = a_1 + nd.$$

Lösung inhomogener Differenzengleichungen

Beispiel 1

Wir betrachten

$$a_{n+1} = 300 + 0.3a_n + 0.12a_{n-1}, \qquad a_0 = 100,\ a_1 = 130.$$

Beispiel 1

Wir betrachten

$$a_{n+1} = 300 + 0.3a_n + 0.12a_{n-1}, \qquad a_0 = 100,\ a_1 = 130.$$

Homogene Gleichung

$$a_{n+1} = 0.3a_n + 0.12a_{n-1}$$

Charakteristische Gleichung mittels $a_n = z^n$

$$z^{n+1} = 0.3z^n + 0.12z^{n-1} \quad \Rightarrow \quad z^n(z^2 - 0.3z - 0.12) = 0$$

Nullstellen

$$z_{1,2} = 0.15 \pm \sqrt{\frac{57}{20}}, \quad z_1 = 0.5275,\ z_2 = -0.2275$$

Lösung der homogenen Gleichung

$$a_h(n) = b \cdot 0.5275^n + c \cdot (-0.2275)^n$$

Lösung inhomogener Differenzengleichungen

Beispiel 1

Wir betrachten

$$a_{n+1} = 300 + 0.3a_n + 0.12a_{n-1}, \qquad a_0 = 100,\ a_1 = 130.$$

Ansatz für Partikularlösung

$$a_n = d = const.$$

Führt auf

$$d = 300 + 0.3d + 0.12d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{15000}{29} = 517.24 = a_p$$

Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} a(n) &= a_h(n) + a_p \\ &= b \cdot 0.5275^n + c \cdot (-0.2275)^n + 517.24 \end{aligned}$$

Lösung inhomogener Differenzengleichungen

Beispiel 1

Wir betrachten

$$a_{n+1} = 300 + 0.3a_n + 0.12a_{n-1}, \qquad a_0 = 100,\; a_1 = 130.$$

Anfangswerte

$$\begin{aligned} 100 &= b + c + 517.24, \\ 130 &= 0.5275b - 0.2275c + 517.24 \end{aligned}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems

$$b = -638.6,\; c = 221.4$$

Lösung der Differenzengleichung

$$a(n) = -638.6 \cdot 0.5275^n + 221.4 \cdot (-0.2275)^n + 517.24$$

Aufgabe 20080725A4.
Beim monatlichen Härtetest nehmen regelmäßig 200 neue Kandidaten teil. Es bestehen 40% auf Anhieb. Von den Kandidaten, die durchfallen, geben 50% auf, die anderen treten zum nächsten Termin erneut an.
Stellen Sie eine Rekursionsvorschrift für die Anzahl a_k der Teilnehmer beim k-ten Test auf.
Geben Sie die Teilnehmerzahlen a_k für $k = 1, \dots 5$ und die Zahl der erfolgreichen Kandidaten für den Zeitraum bis $k = 5$ an. (Hinweis: Beim ersten Test gibt es keine Wiederholungskandidaten.)
Berechnen Sie den Grenzwert von a_k für $k \to \infty$, sofern die Folge konvergiert.

Aufgabe 20080725A4.
Beim monatlichen Härtetest nehmen regelmäßig 200 neue Kandidaten teil. Es bestehen 40% auf Anhieb. Von den Kandidaten, die durchfallen, geben 50% auf, die anderen treten zum nächsten Termin erneut an.
Stellen Sie eine Rekursionsvorschrift für die Anzahl a_k der Teilnehmer beim k-ten Test auf.
Geben Sie die Teilnehmerzahlen a_k für $k = 1, \ldots 5$ und die Zahl der erfolgreichen Kandidaten für den Zeitraum bis $k = 5$ an. (Hinweis: Beim ersten Test gibt es keine Wiederholungskandidaten.)
Berechnen Sie den Grenzwert von a_k für $k \to \infty$, sofern die Folge konvergiert.

Lösung (I):

- Rekursionsvorschrift

$$a_n = 0.3a_{n-1} + 200$$

  (hier eine inhomogene Differenzengleichung),
- Startwert $a_1 = 200$,
- einfaches Einsetzen führt auf

$$a_2 = 260,\ a_3 = 278,\ a_4 = 283.4,\ a_5 = 285.02,$$

- erfolgreiche Kandidaten

$$b_1 = 80,\ b_2 = 104,\ b_3 = 111.2,\ b_4 = 113.36,\ b_5 = 114.01.$$

Aufgabe 20080725A4.

Beim monatlichen Härtetest nehmen regelmäßig 200 neue Kandidaten teil. Es bestehen 40% auf Anhieb. Von den Kandidaten, die durchfallen, geben 50% auf, die anderen treten zum nächsten Termin erneut an.

Stellen Sie eine Rekursionsvorschrift für die Anzahl a_k der Teilnehmer beim k-ten Test auf.

Geben Sie die Teilnehmerzahlen a_k für $k = 1, \ldots 5$ und die Zahl der erfolgreichen Kandidaten für den Zeitraum bis $k = 5$ an. (Hinweis: Beim ersten Test gibt es keine Wiederholungskandidaten.)

Berechnen Sie den Grenzwert von a_k für $k \to \infty$, sofern die Folge konvergiert.

Lösung (II):

- Rekursionsvorschrift (inhomogene Differenzengleichung)

$$a_n = 0.3a_{n-1} + 200,$$

- zunächst nur homogene Differenzengleichung betrachten

$$a_n = z^n \Rightarrow z^n = 0.3z^{n-1} \Rightarrow z = 0.3,$$

- Lösung der inhomogenen Diff.-gl. hat die Form $a_n = c0.3^n + d$,
- Anfangswerte $a_1 = 200$, $a_2 = 260$ führen auf

$$a_n = -\frac{2000}{7}0.3^n + \frac{2000}{7},$$

- somit $a_3 = 278$, $a_4 = 283.4$, $a_5 = 285.02$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2000}{7} = 285.71 \Rightarrow$ Gleichgewicht.

Aufgabe 20130730A4.
Die aktuellen Umfragewerte mobilisieren die Anhänger der Gestreiften (G) wie auch der Karierten (K), so dass sich am Folgetag Zustimmungswerte gemäß den Formeln

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= G_n + \alpha(K_n - G_n) + \beta(G_n - G_{n-1}) \\ K_{n+1} &= 100 - G_{n+1} \end{aligned}$$

mit $\alpha = 0.0075$ und $\beta = 0.95$ ergeben.
Geben Sie eine explizite Formel für G_n an, wenn $G_0 = G_1 = 32$, $K_0 = K_1 = 68$ sei!
Berechnen Sie G_{55}!

Ansätze:

- Eliminieren von K und Einsetzen von $\alpha = 0.0075$ und $\beta = 0.95$ führt auf

$$G_{n+1} = 1.935G_n - 0.95G_{n-1} + 0.75,$$

- absolutes Glied 0.75 weglassen (zunächst wieder nur homogene Diff.-gl.)

$$z^2 - 1.935z + 0.95 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = 0.9675 \pm 0.1180836568\, i$$

- mit MAPLE führt dies auf (Nutzung von $G_0 = G_1 = 32$, $G_2 = 32.27$)

$$\begin{aligned} G_n &= (-9 + 2.477057434\, i)\, z_1^n + (-9 - 2.477057434\, i)\, z_2^n + 50 \\ G_{55} &= 45.48183650. \end{aligned}$$

Aufgabe 20130730A4.
Die aktuellen Umfragewerte mobilisieren die Anhänger der Gestreiften (G) wie auch der Karierten (K), so dass sich am Folgetag Zustimmungswerte gemäß den Formeln

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= G_n + \alpha(K_n - G_n) + \beta(G_n - G_{n-1}) \\ K_{n+1} &= 100 - G_{n+1} \end{aligned}$$

mit $\alpha = 0.0075$ und $\beta = 0.95$ ergeben.
Geben Sie eine explizite Formel für G_n an, wenn $G_0 = G_1 = 32$, $K_0 = K_1 = 68$ sei!
Berechnen Sie G_{55}!

Ansätze:

- Eliminieren von K und Einsetzen von $\alpha = 0.0075$ und $\beta = 0.95$ führt auf

$$G_{n+1} = 1.935G_n - 0.95G_{n-1} + 0.75,$$

- absolutes Glied 0.75 weglassen (zunächst wieder nur homogene Diff.-gl.)

$$z^2 - 1.935z + 0.95 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = 0.9675 \pm 0.1180836568\, i$$

- mit MAPLE führt dies auf (Nutzung von $G_0 = G_1 = 32$, $G_2 = 32.27$)

$$\begin{aligned} G_n &= (-9 + 2.477057434\, i)\, z_1^n + (-9 - 2.477057434\, i)\, z_2^n + 50 \\ G_{55} &= 45.48183650. \end{aligned}$$

Anwendungen:

- Umformung eines Modells in explizite Darstellung möglich
- häufig sind die Modellierungen in der Ökonomie von Interesse
- mittels Rekursion Verläufe für einen begrenzten Zeitraum modellieren
- Tabellenkalkulationen oder richtige Programmiersprache nutzen

Mögliche Anwendungen in der Ökonomie:

- Multiplikator-Akzelerator-Modell
- Cobb-Webb-Modell
- Zusammenhänge zwischen voneinander abhängigen Güter (Dünger, Getreide)
- Fragen nach Stationarität und Stabilität

Anwendungen zu inhomogenen Differenzengleichungen

Multiplikator-Akzelerator-Modell:

- Keynesianisches Konjunkturmodell zur Modellierung von Konjunkturzyklen
- auch als Samuelson-Hicks-Modell bekannt
- Modellierung von Güternachfrage und Investitionen
- Nachfrage bestimmt Produktion und Einkommen

Parameter:

- Konsumfunktion

$$C_n = C_a + cY_{n-1}, \quad c \in [0, 1]$$

- Investitionsfunktion

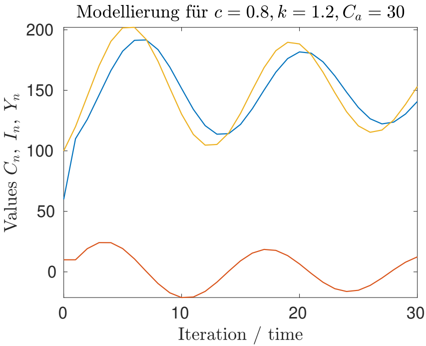
$$I_n = ck(Y_{n-1} - Y_{n-2}), \quad k > 0$$

- Gesamtnachfrage

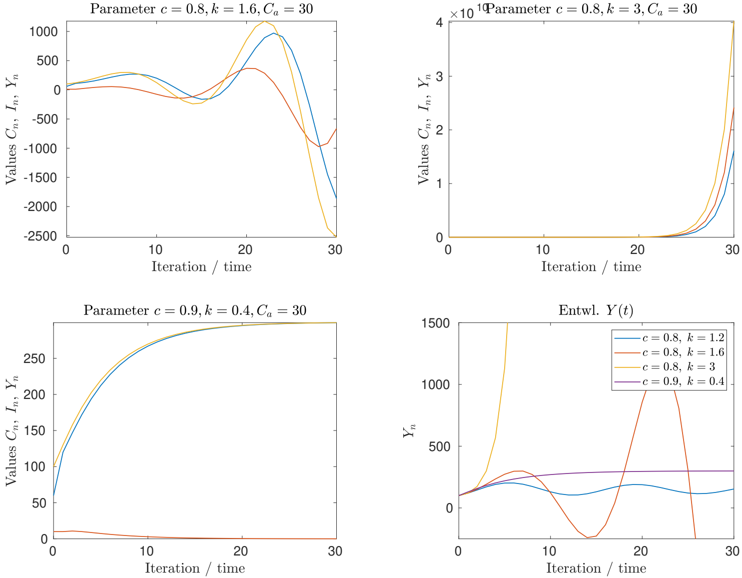
$$Y_n = C_n + I_n$$

Differenzengleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} C_n \\ I_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_a + cY_{n-1} \\ ck(Y_{n-1} - Y_{n-2}) \\ C_n + I_n \end{pmatrix}$$



Verschiedene Parameter



Anwendungen zu inhomogenen Differenzengleichungen

Umformung in Differenzengleichung 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= C_{n+1} + I_{n+1} \\ &= C_a + c(1+k)Y_n - ckY_{n-1} \end{aligned}$$

Stabilität:

- charakteristische Gleichung der homogenen Differenzengleichung

$$z^2 - c(1+k)z + ck = 0$$

- Lösungen sind

$$z_{1,2} = \frac{(1+k)c}{2} \pm \sqrt{\frac{((1+k)^2c - 4k)c}{4}}$$

- offensichtlich kann z hier komplex sein kann
- Analyse der Stabilität und des Schwingverhaltens

Definition 1.1

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Das Paar

$$z = (x, y) = x + yi$$

ist eine komplexe Zahl mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$.

Die Menge der komplexen Zahlen ist $\mathbb{C} = \{z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$. Der Betrag einer komplexen Zahl ist

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wichtig:

- Division

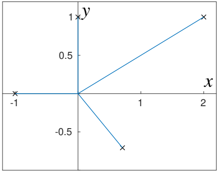
$$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i, \qquad \text{z.B. } \frac{4 + 3i}{2 + i} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5} i$$

- imaginäre Einheit $i^2 = -1$
- Wurzeln komplexer Zahlen sind ebenfalls komplexe Zahlen
- mittels komplexer Zahlen wird jede quadratische Gleichung lösbar
- mehr noch: jede Polynomgleichung n-ten Grades hat n (nicht notwendigerweise verschiedene) komplexe Lösungen

Lemma 1.2 (Trigonometrische Darstellung)

Für jede komplexe Zahl $z = x + yi$ *gibt es einen Winkel* $\varphi \in \mathbb{R}$ *(bezeichnet mit* $\varphi = \arg(z)$*), sodass*

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = |z|\exp(i\varphi).$$



Radizieren:

- Berechnung von $z = \sqrt[n]{a}$

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{|a|}\exp\left(i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, \ldots, n-1,$$

$$= \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \qquad k = 0, \ldots, n-1,$$

- Lösungen auf dem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|a|}$ in der komplexen Ebene.

Anwendungen zu inhomogenen Differenzengleichungen

Umformung in Differenzengleichung 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= C_{n+1} + I_{n+1} \\ &= C_a + c(1+k)Y_n - ckY_{n-1} \end{aligned}$$

Stabilität:

- charakteristische Gleichung der homogenen Differenzengleichung

$$z^2 - c(1+k)z + ck = 0$$

- Lösungen sind

$$z_{1,2} = \frac{(1+k)c}{2} \pm \sqrt{\frac{((1+k)^2 c - 4k)c}{4}}$$

- offensichtlich kann z hier komplex sein kann
- Analyse der Stabilität und des Schwingverhaltens

Satz 1.3 (Beschränktheit der Iterierten)

Die Iterierten einer Differenzengleichung bleiben genau dann für $n \to \infty$ beschränkt, wenn die Nullstellen z_i des charakteristischen Polynoms die Wurzelbedingung erfüllen.

Die Nullstellen erfüllen die Wurzelbedingung, wenn

$$|z_i| < 1 \quad \textit{oder} \quad |z_i| = 1 \textit{ und } z_i \textit{ ist einfache Nullstelle}$$

für alle $i = 1, \ldots, r$ gilt.

Stabilität:

- Iterierte bleiben beschränkt, wenn

$$\left| \frac{(1+k)c}{2} \pm \sqrt{\frac{((1+k)^2c - 4k)c}{2}} \right| \begin{array}{c} < \\ \leq \end{array} 1$$

- die Lösungen bleiben also im komplexen Einheitskreis
- dies ist der Fall, wenn

$$c \leq \frac{1}{k}$$

Schwingverhalten (komplexer Fall):

- schwingendes Verhalten, wenn beide Nullstellen echt komplex sind
- die Nullstellen sind komplex für

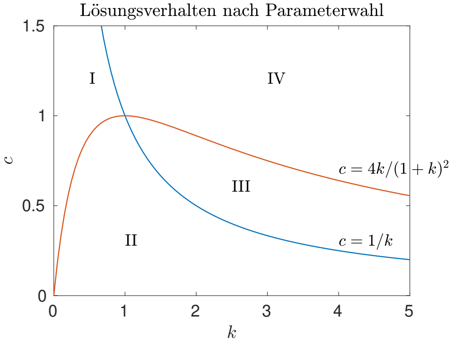
$$c(1+k^2) - 4k < 0 \quad \Rightarrow \quad c < \frac{4k}{(1+k)^2}$$

Schwingverhalten (reeller Fall):

- Schwingungen können sich einstellen, wenn eine Nullstelle z_i negativ ist
- jedoch nur, wenn die betragsgrößere Nullstelle negativ ist

Bereiche:

	konvergent (gedämpft)	divergent (verstärkend)
monoton	*I*	*IV*
schwingend	*II*	*III*



Systeme von Differenzengleichungen

Bemerkung 2

Jede Differenzengleichung n-ter Ordnung lässt sich in ein System von n gekoppelten Differenzengleichungen erster Ordnung überführen und andersherum.

Hilfsvariable

$$z \in \mathbb{R}^n, \quad z = (y_1,\ y_2, \ldots, y_n)^T$$

System

$$z^{(i+1)} = \left(z_2^{(i)}, \ldots, z_n^{(i)}, f(z_1^{(i)}, \ldots, z_{n-1}^{(i)})\right)^T$$

Multiplikator-Akzelerator-Modell:

- Differenzengleichung 2. Ordnung

$$Y_{i+1} = C_a + c(1+k)Y_i - ckY_{i-1}$$

- 2D-System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} Y_{i-1} \\ Y_i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -ck & c(1+k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} 0 \\ C_a \end{pmatrix}$$

Gleichgewichtslösung (Partikularlösung):

- für die Iteration $z_{i+1} = Az_i + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soll gelten $z_{i+1} = z_i = z^*$
- Umstellen liefert
$$(I - A)z^* = b \quad \Rightarrow \quad z^* = (I - A)^{-1}b$$
- eindeutige Lösung, falls $\mathrm{rg}(I - A) = n$

Stabilität:

- alternative Analyse mittels Eigenwerten von A, siehe Abschnitt 2
- ein Eigenwert ist ein $\lambda \in \mathbb{C}$, für welches es ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ gibt, sodass
$$Av = \lambda v$$
- die Iterierten bleiben beschränkt, falls alle Eigenwerte von A betragsmäßig kleiner als 1 bleiben.

Übersicht

Übergang vom diskreten Modell zum kontinuierlichen:

- Folgen modellieren Entwicklungen für diskrete Zeitpunkte
- Differenzengleichung beschreibt Übergang von einem Zeitpunkt zum nächsten
- Genauigkeit vom Abstand zwischen zwei Zeitpunkten und der Dynamik abhängig
- Modellierung wird für kontinuierliche Zeitskala genauer

Definition 2.1

Eine explizite Differential erster Ordnung hat die Form

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad a \le x \le b$$

mit gegebenem $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und einer gesuchten Lösung* $y : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Übergang für Bevölkerungsentwicklung:

- diskretes Modell mit k den Jahren führt auf

$$Y_{k+1} = (1 + g - s) \cdot Y_k, \qquad g, s, g - s > 0$$

- sehr einfaches Modell, abgeschlossen also keine Zu- oder Abwanderung
- sinnvoll wären etwa

$$\begin{aligned} g &= \frac{3.5}{2 \cdot 60}, \ s = \frac{1}{60} \quad \text{(um 1900)}, \\ g &= \frac{1.8}{2 \cdot 75}, \ s = \frac{1}{75} \quad \text{(um 1980)}, \\ g &= \frac{1.9}{2 \cdot 80}, \ s = \frac{1}{80} \quad \text{(um 2010)} \end{aligned}$$

- kontinuierliches Modell führt auf

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{y}(t) = (g - s) \cdot y(t) \tag{1}$$

Realistischeres Modell:

- Ansatz aus (1) führt ggf. auf unbeschränktes Wachstum
- realistischere Modellierung mit streng monoton fallender Geburtenrate

$$g = g_0 - \gamma y(t), \qquad \dot{y}(t) = ay(t) - by(t)^2$$

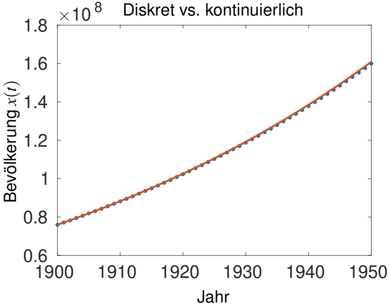
- auch Verhulst oder logistische Gleichung genannt, siehe später Kapitel 1
- analytische Lösung mit $y(0) = y_0$ ist

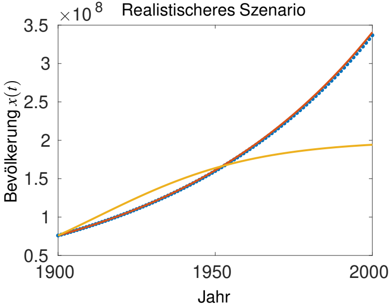
$$y(t) = -\frac{y_0 b}{(ay_0 - b)\exp(-bt) - y_0 a}$$

P.-F. Verhulst: *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, Correspondance mathématique et physique 10, 113–121, 1938.

Modellierungen diskretes und kontinuierliches Modell:

- Modellierung für Bevölkerungszahlen der USA
- startend mit $x(1900) \approx 76.000.000$
- Simulation bis 1950 (Vgl. diskret, kont.) bzw. 2000 (angepasste Geburtenrate)
- Einwanderung nicht mit modelliert





Diskrete Zinsen:

- vorgegebene Zeitintervalle/Zeitskala, etwa Monate
- monatliche Berechnung der Zinsen, monatliche Einzahlungen
- Entwicklung des Kapitals

$$K_{n+1} = (1+p)K_n + E$$

Kontinuierliches Modell:

- ohne Einzahlungen, also $E = 0$ ist Zuwachs proportional zum aktuellen Kapital

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{K}(t) = pK(t)$$

- mit zusätzlicher Einzahlung von E pro Zeiteinheit 1 ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}(t) = pK(t) + E$$

Zinseszinsformel lautet (diskreter Fall):

$$K_n = K_0(1+p)^n + E\frac{(1+p)^n - 1}{p}$$

Lösung des kontinuierlichen Modells: (zunächst ohne E)

- Zinssatz p ist die Vermehrungsrate pro 1 Zeiteinheit
- Umformen ergibt
$$\mathrm{d}K = pK\,\mathrm{d}t$$
- Trennung der Variablen
$$\frac{1}{K}\,\mathrm{d}K = p\,\mathrm{d}t$$
- Integration beider Seiten liefert
$$\frac{1}{K}\,\mathrm{d}K = p\,\mathrm{d}t \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{K}\,\mathrm{d}K = \int p\,\mathrm{d}t \quad\Leftrightarrow\quad \ln|K| = pt + C$$
$$\Rightarrow\quad K(t) = \tilde{C}\exp(pt)$$
- $\tilde{C} \in \mathbb{R}_+$ ist eine Konstante, hier $\tilde{C} = K_0$

Berücksichtigung von E:

- $K(t) = \tilde{C}_0 \exp(pt)$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung
- analog zu Differenzengleichungen Berechnung einer Partikularlösung

$$K_p(t) = -\frac{E}{p}$$

- allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet

$$K(t) = \tilde{C} \exp(pt) - \frac{E}{p}$$

- Anfangswert $K_0 = K(0)$ liefert die Lösung

$$K(t) = (K_0 + \frac{E}{p}) \exp(pt) - \frac{E}{p}$$

Grenzwert des diskreten Falls:

- Unterteilung eines Zeitintervalls in m kleinere
- neue Parameter sind $\tilde{n} = mn$, $\tilde{E} = E/m$, $\tilde{p} = p/m$, Berechnung von $\tilde{K}_n$
- Einsetzen in ZZF ergibt

$$\tilde{K}_n = \left(K_0 + \frac{E}{p}\right)\left(\frac{m+p}{m}\right)^{mn} - \frac{E}{p}$$

- Grenzübergang $m \to \infty$ betrachten, mit $\lim_{m\to\infty}((m+p)/p)^m = \exp(p)$ ergibt sich

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{K}_n = \left(K_0 + \frac{E}{p}\right)\exp(pn) - \frac{E}{p}$$

Bemerkung 3

Die Formel aus der kontinuierlichen Betrachtung stimmt also mit dem Grenzwert des diskreten Modells überein.

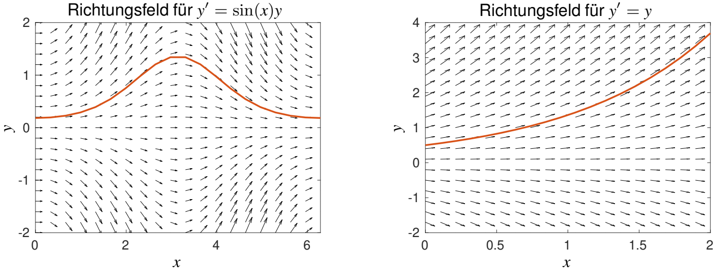
Definition 2.2

Mit $f : [a, b] \times \mathbb{R}$ hat eine explizite <u>Differentialgleichung</u> n-ter Ordnung die Form

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \qquad a \leq x \leq b.$$

Bemerkung 4

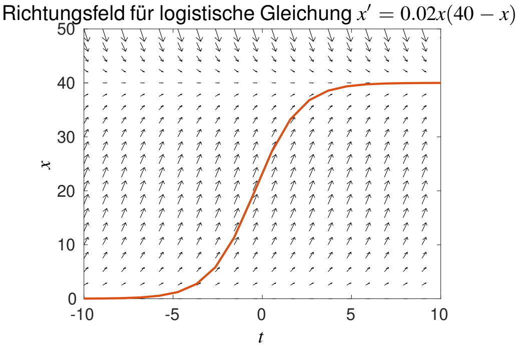
Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften führen oft nur auf Differentialgleichungen erster Ordnung, siehe Definition 2.1.



Richtungsfeld:

- für Differentialgleichung erster Ordnung mit einer Variablen
- einzeichnen des Anstiegs in Abhängigkeit der rechten Seite der Differentialgleichung

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$



<u>Anfangswertproblem</u>:

- eine Differentialgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen *Ist*-Zustand, äußeren Einflüssen und *Änderungsverhalten*
- ist zudem ein aktueller Wert bekannt (Anfangswert $y(x_0) = y_0$), so handelt es sich um ein Anfangswertproblem

Definition 2.3

Mit $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat ein <u>Anfangswertproblem</u> die Form

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \qquad a \leq x \leq b, \\ y(a) &= y_0. \end{aligned}$$

<u>Gesucht</u>:

$$y : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

Anwendungsbeispiele I:

- Modellierung von Konjunkturzyklen
- allgemein Räuber-Beute-Systeme
  $\rightsquigarrow$ Modellierung von Wechselwirkungen (Konkurrenz, Synergie)
- Wechselspiel zwischen Beschäftigungsgrad und Lohnquote
- Bevölkerungsentwicklung, logistische Gleichung

Anwendungsbeispiele II:

- Radioaktiver Zerfall einer Zahl $N(t)$ von Atomen $\rightsquigarrow$ Altersbestimmung (Isotope)
- Räuber-Beute-Systeme (Biologie)
- Reaktionskinetik (Chemie), dynamische Mehrkörpersysteme (Physik)

Beispiel eines SEIR-Modells:

- vereinfachte Modellierung der Ausbreitung einer Pandemie,
- 4 Klassen

  S: Suspectibles, Individuen, die sich mit der Krankheit anstecken können,

  E: Exposed, Infizierte, die noch nicht infektiös sind,

  I: Infectious, Individuen, die infiziert sind und die Krankheit übertragen können,

  R: Removed, Zahl geheilter oder verstorbener Patienten,
- Individuen durchlaufen

$$S \to E \to I \to R,$$

- Übergänge zwischen den Stufen modellieren.

D. G. Kendall: *Deterministic and Stochastic Epidemics in Closed Populations*, Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. 3(4), 149–165, 1925.

Modellierung des Durchlaufs $S \to E \to I \to R$:

- Übergänge

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= -\beta S(t)I(t) && \text{proportional Begegnungen von } S(t) \text{ und } I(t)\\
E'(t) &= +\beta S(t)I(t) - \alpha E(t) && \text{Durchlaufen der Stufen}\\
I'(t) &= + \alpha E(t) - \gamma I(t) && \text{Durchlaufen der Stufen}\\
R'(t) &= + \gamma I(t)
\end{aligned}
$$

- Parameter $\alpha, \beta, \gamma > 0$

$$
\begin{aligned}
\beta &: \quad \text{Kehrwert mittlerer Zeit zwischen Kontakten,}\\
\alpha &: \quad \text{Kehrwert mittlerer Latenzzeit,}\\
\gamma &: \quad \text{Kehrwert mittlerer infektiöser Zeit.}
\end{aligned}
$$

- β steuerbar, α, γ biologisch fest (mglw. durch Arznei leicht reduzierbar).

Modellierung:

- Anzahlen normiert Menge mit 4 Mio. Individuen, anfangs nur ein(!) Infizierter

$$S(0) = 1, \quad E(0) = \frac{1}{4\,000\,000}, \quad I(0) = R(0) = 0.$$

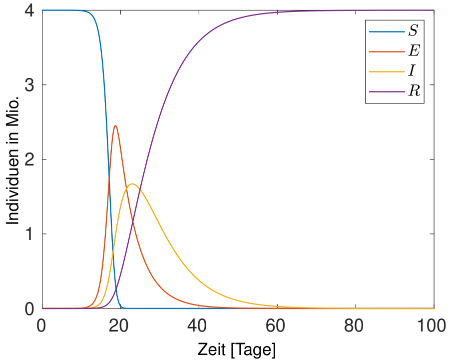
Modellierung:

- Anzahlen normiert Menge mit 4 Mio. Individuen, anfangs nur ein(!) Infizierter

$$S(0) = 1, \quad E(0) = \frac{1}{4\,000\,000}, \quad I(0) = R(0) = 0.$$

Frei laufen lassen:

$$\beta = 6, \quad \alpha = \frac{1}{5}, \quad \gamma = \frac{1}{7}$$



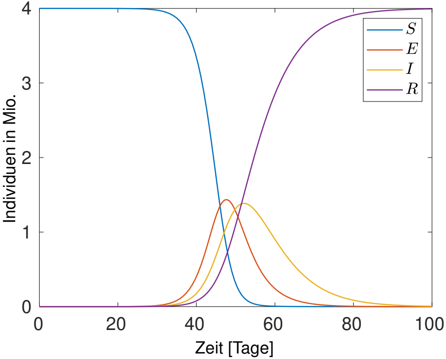
Modellierung:

- Anzahlen normiert Menge mit 4 Mio. Individuen, anfangs nur ein(!) Infizierter

$$S(0) = 1, \quad E(0) = \frac{1}{4\,000\,000}, \quad I(0) = R(0) = 0.$$

Etwas Abstand halten:

$$\beta = 1.33, \quad \alpha = \frac{1}{5}, \quad \gamma = \frac{1}{7}$$



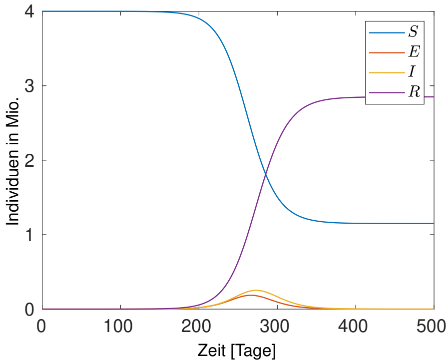
Modellierung:

- Anzahlen normiert Menge mit 4 Mio. Individuen, anfangs nur ein(!) Infizierter

$$S(0) = 1, \quad E(0) = \frac{1}{4\,000\,000}, \quad I(0) = R(0) = 0.$$

Abstand halten + Schutzmaßnahmen:

$$\beta = \frac{1}{4}, \quad \alpha = \frac{1}{5}, \quad \gamma = \frac{1}{7}$$



Anfangswertprobleme

Modellierung:

- Anzahlen normiert Menge mit 4 Mio. Individuen, anfangs nur ein(!) Infizierter

$$S(0) = 1, \quad E(0) = \frac{1}{4\,000\,000}, \quad I(0) = R(0) = 0.$$

Hier zu beachten:

- vereinfachende Modellierung,
- keine adaptive Steuerung (Drosten, Wieler, Vorsicht) durch angepasste Werte.

Anpassung/Steuerung in der realen Welt durch:

- Erfahrungen,
- Vorsicht,
- Quarantäne etc.

Anfangswertprobleme

Formale Lösung:

$$y(x) = y_0 + \int_a^b f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

Einfache Fälle:

- Exponentielles Verhalten

$$y' = ky,\; y(0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = y_0 \exp(kx)$$

- Wurzelfunktion

$$y' = \frac{x}{y},\; y(0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \sqrt{x^2 + y_0^2}.$$

Schwierigkeit:

- Integrand hängt von der unbekannten Funktion $y(x)$ ab
- nicht selten lassen sich Anfangswertprobleme nur numerisch lösen

Definition 2.4

Die Funktion $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt eine Lipschitz-Bedingung zur Lipschitz-Konstanten $L > 0$, falls für alle $x \in [a,b]$ und $y, z \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y - z|.$$

Satz 2.5 (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung)

Erfüllt $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-Bedingung zu $L > 0$, dann existiert auf dem Intervall $[a,b]$ eine eindeutige Lösung $y(x)$ mit $y(a) = y_0$.

Bemerkung:

- für einige Fälle lassen sich analytische Lösungen finden
- Ansätze sind Variablentrennung, homogene Lösungen, $\exp$-Ansatz, Bernoulli, ...
- Unbekannte $y(x)$ kann auch vektorwertig sein (siehe Räuber-Beute-Systeme)

Spezialfälle

Variablentrennung:

- für Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

- Lösung definiert durch

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel:

- gesucht ist die Lösung von $y' = xy$
- Variablentrennung führt zu

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int x\,\mathrm{d}x\\ \ln|y| &= \frac{1}{2}x^2 + C\\ y &= \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = K\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\end{aligned}$$

Inhomogene Differentialgleichungen

Inhomogene Gleichung

$$y'(x) = f(x)g(y) + h(x)$$

Lösungsstrategie:

- zunächst die homogene Gleichung lösen, dies führt auf $y_h(x)$
- anschließend eine Partikularlösung $y_p(x)$ bestimmen
- dazu in $y_h(x)$ die Konstante $C = C(x)$ setzen und erneut lösen
- allgemeine Lösung ist dann

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

- anschließend ggf. die Konstante mittels des Anfangswertes bestimmen

Beispiel 2

Die Differentialgleichung $K'(t) = pK(t) + E$ *ist für* $E \neq 0$ *inhomogen. Die homogene Gleichung lautet*

$$K'(t) = pK(t)$$

und besitzt die allgemeine Lösung $K(t) = C\exp(pt)$.

Bestimmung einer Partikularlösung mittels $K(t) = K_p$. *Dies führt auf*

$$\begin{aligned} K_p'(t) &= 0, \qquad 0 = pK_p + E = pK_p + E \\ K_p &= -E/p. \end{aligned}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(t) = C\exp(pt) - \frac{E}{p}.$$

Der Anfangswert $y(0) = K_0$ *führt auf die Lösung*

$$y(t) = (K_0 + \frac{E}{p})\exp(pt) - \frac{E}{p}.$$

Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = ay' + by$$

Ansatz:

$$y(t) = \exp(\lambda t)$$

Einsetzen ergibt:

$$\lambda^2 y(t) - a\lambda y(t) - by(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

Lösen der charakteristische Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

Allgemeine Lösung der DGL:

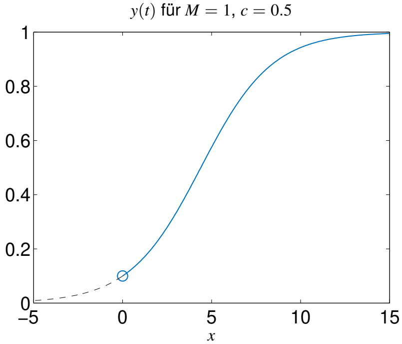
$$y(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$$

Logistische Gleichung:

- Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = cy(t)(M - y(t))$$

- Modellierung von Wachstumsprozessen
- Spezialfall von Variablentrennung
- bedeutsam für Anwendungen etwa in der Ökonomie



Erweiterungen:

- Unbekannte $y(x)$ kann auch vektorwertig sein (siehe Räuber-Beute-Systeme)
  $\rightarrow$ System gewöhnlicher Differentialgleichungen (ODEs)
- ist die unabhängige Variable x ein Vektor (z. B. Black-Scholes-Formel)
  $\rightarrow$ partielle Differentialgleichung (PDE)
- kommen höhere Ableitungen vor
  $\rightarrow$ Umformung zu System von Gleichungen erster Ordnung (daher konzentriert man sich bei ODEs auf das Lösen von Systemen)

Gekoppelte System:

- typischerweise existieren Abhängigkeiten zwischen $y_1, \ldots, y_n$
- anderenfalls ist das System entkoppelt
- u.U. lassen sich die DGL umformen und so entkoppeln

Systeme von Differentialgleichungen

Räuber-Beute-Modelle:

- zwei Größen, $x(t)$ (Beutetiere) und $y(t)$ (Räuber)
  $\rightarrow$ Zustand (x, y) hängt von der Zeit t ab
- je eine Wachstumsgeschwindigkeit gegeben
- ohne Räuber wachsen die Beutetiere ungehemmt
- ohne Beute verkümmert die Räuberpopulation
- beide Populationen vorhanden $\quad \rightarrow \quad$ Zuwachs bei Räubern, Abgänge bei Beute
- Differentialgleichung

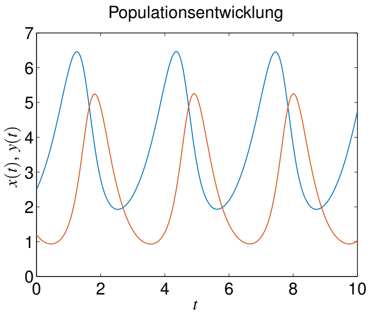
$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \\
\dot{y}(t) &= cx(t)y(t) - dy(t)
\end{aligned}
$$

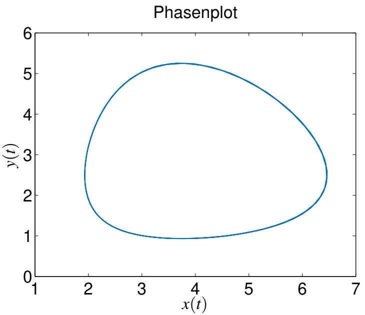
A. J. Lotka: *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins, Baltimore, 1925.
V. Volterra: *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Mem. Acad. Lincei Roma 2, 31–113, 1926.

Räuber-Beute-Modelle

Beispiel:

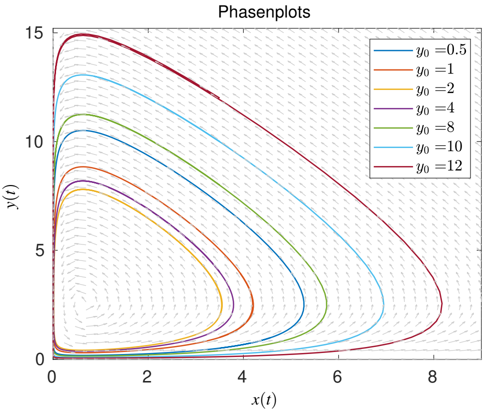
- Parameter: $a = 1.5$, $b = 0.6$, $c = 0.8$, $d = 3.0$
- Anfangswerte $x(0) = 2.5$, $y(0) = 1.2$





Einfluss der Anfangswerte:

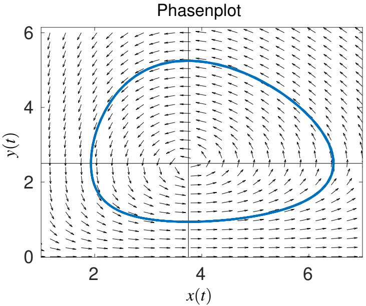
- Parameter bestimmen das Gleichgewicht und das Verhalten
- Anfangswerte bestimmen nur das Verhalten
- ungünstige Anfangswerte können zum Aussterben führen
- Ergebnisse für $a = 1.5$, $b = 0.6$, $c = 0.8$, $d = 0.5$ sowie $x(0) = 3.5$



Gleichgewichtslösung:

$$0 = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad x(a - by) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{b},$$
$$0 = \dot{y} \quad \Rightarrow \quad y(cx - d) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{c}$$

- die Gleichgewichtslösung ist demnach $(x^*, y^*) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$
- für $a = 1.5$, $b = 0.6$, $c = 0.8$, $d = 3.0$ also $(x^*, y^*) = 2.5, 2.75)$



Volterra-Lotka Modelle in der Ökonomie

Goodwin-Modell:

- Wechselspiel zwischen Beschäftigungsgrad $v(t)$ und Lohnquote $u(t)$
- Wachstumsprozesse laufen im Hintergrund
- Wachstumsraten Arbeitsproduktivität und Erwerbsbevölkerung α, β
- Modellierung der Reallohnveränderung mittels γ, ρ
- Kapitalkoeffizient σ
- Zusammenhänge sind vereinfacht

$$\frac{\dot{v}}{v} = -\frac{1}{\sigma}u + \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta, \qquad \frac{\dot{u}}{u} = \varrho v - (\gamma + \alpha)u$$

Verbindung zu Volterra-Lotka:

- Beschäftigungsquote als Beute und Lohnquote als Räuber modelliert
- Differentialgleichungen

$$\dot{v} = -\frac{1}{\sigma}vu + \Big(\frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta\Big)v, \qquad \dot{u} = \rho uv - (\gamma + \alpha)u$$

R. M. Goodwin: *A Growth Cycle*, in Socialism, Capitalism and Economic Growth, Ed. C. H. Feinstein, Cambridge University Press, 54–58, 1967.

Beschäftigungsgrad und Lohnquote:

- Parameter für die Modellierung

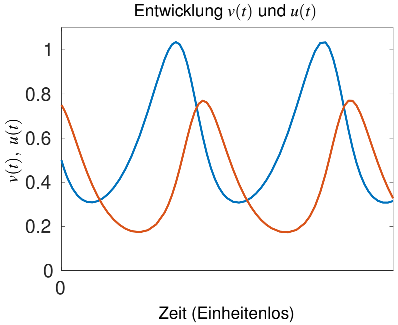
$$\alpha = 0.05,\ \beta = 0.01,\ \sigma = 10,\ \rho = 0.1,\ \gamma = 0.01$$

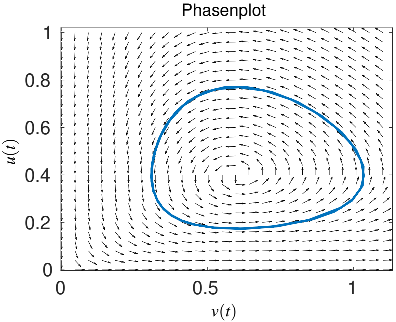
- Parameter im Volterra-Lotka-Modell

$$\dot{v} = av(t) - bv(t)u(t)a, \qquad \dot{u} = cv(t)u(t) - du(t)$$

und also

$$a = \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta = 0.04,\ b = \frac{1}{\sigma} = 0.1,\ c = \rho = 0.1,\ d = \gamma + \alpha = 0.06$$





Allgemeines System:

- ohne Festlegung der Vorzeichen der Parameter

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) - bx(t)y(t),\\ \dot{y}(t) &= cx(t)y(t) - dy(t)\end{aligned}$$

- Räuber-Beute System für $b, c > 0$, damit indirekt $a, d > 0$
- Konkurrenz für $b > 0$, $c < 0$, damit indirekt $a > 0$, $d < 0$
- Synergie für $b < 0$, $c > 0$, damit indirekt $a < 0$, $d > 0$

Erweiterungen:

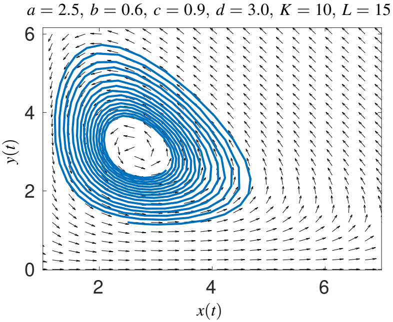
- Populationsgrenzen (Maxima)
- intraspezifische Konkurrenz
- Ortsabhängigkeit (lokale Vorteile für kleinere Unternehmen)
- mehr als zwei Anbieter

Begrenzte Populationen

Marktwirtschaftliches Modell mit 2 Spezies:

- obere Grenzen K und L zur Regulierung
- Wahl der Parameter kann zu Dämpfung oder Eskalation führen

$$\dot{x} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy, \qquad \dot{y} = cxy - dy\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$



Anfangswertprobleme:

- häufig nicht geschlossen lösbar
- numerische Approximation der Lösung

Diskretisierte Lösung:

- zur Lösung kontinuierlicher Modelle (Differentialgleichung, Differenzengleichungen)
- festlegen eines Gitters von Beobachtungszeitpunkten
- Abstand zwischen zwei Zeitpunkten sei h (Zeitschrittweite)

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

- Zuwachs von Zustandsgrößen wird als h mal Wachstumsgeschwindigkeit angesetzt

$$Y_{n+1} = Y_n + h \cdot f(x_n, Y_n) \tag{2}$$

- die Vorschrift aus (2) wird Euler-Verfahren genannt

Numerisches Verfahren:

- Anfangswertproblem
$$y' = f(x,y), \quad y(a) = y_0$$
- Approximation $Y_i \approx y(x_i)$
- häufig gilt für das Gitter $x_{i+1} - x_i = h = \text{const.}$ also $x_i = a + i \cdot h$ mit $h = (b-a)/N$
- Initialisierung
$$Y_0 = y_0$$
- Iteration Euler Verfahren
$$Y_{i+1} = Y_i + h \cdot f(x_i + Y_i)$$

Heun-Verfahren:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}\Big(f(x_i, Y_i) + f\big(x_i + h, Y_i + h \cdot f(x_i, Y_i)\big)\Big)$$

Definition 2.6 (Klassisches Runge-Kutta 1901)

Sei (x_ℓ, Y_ℓ) die aktuelle Iterierte. Ein s-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren besitzt die Form

$$
\begin{aligned}
K_1 &= f(x_i, Y_i),\\
K_2 &= f(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}K_1),\\
K_3 &= f(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}K_2),\\
K_4 &= f(x_i + h, Y_i + hK_3)
\end{aligned}
$$

mit

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Bemerkungen:

- Verfahren der Ordnung 4, guter Kompromiss aus Rechenaufwand und Genauigkeit
- häufig genutztes Verfahren für äquidistante Schrittweiten
- adaptive Wahl der Schrittweite zur Verbesserung der Näherungen

Übersicht

Übersicht

Page-rank-Algorithmus

Ökonomische Fragestellung:

Wie erstellen wir eine Rangordnung von Internetseiten bezüglich ihrer Popularität?

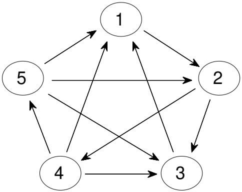
Modellbildung:

- Popularitätswerte nach Anzahl von Links
- für Rangordnung sind die eingehenden links wichtig
- zusätzliche Gewichtung nach den Rängen der Webseiten der eingehenden links
- rekursives Modell, Problem: Ränge der anderen Webseiten sind noch nicht bestimmt

Page-rank-Algorithmus

Beispiel:

- 5 Seiten, Links wie folgt



Rekursives Modell:

- Übergangsmatrix A mit zu bestimmenden Popularitätswerten in x, sodass

$$x = Ax$$

- Übergangsmatrix mittels eingehender Links

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{kein Link von } j \text{ nach } i, \\ \frac{1}{\#\text{ von } j \text{ ausg. Links}} & \text{sonst} \end{cases}$$

L. Page, S. Brin: *Method for node ranking in a linked database*, Patent, 2001.

V. Shikhman: *Studienbücher Wirtschaftsmathematik Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Studienbücher Wirtschaftsmathematik, Springer Nature, Wiesbaden 2019.

Page-rank-Algorithmus

Aufstellen der Übergangsmatrix:

- ein- und ausgehende Links

Webseite	1	2	3	4	5
raus	1	2	1	3	3
rein	3	2	3	1	1

- Übergangsmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

- Lösung $x \in \mathbb{R}^5$ mit $Ax = x$
- Eigenwertproblem.

Übersicht

Endomorphismus

Definition 3.1

Sei V ein Vektorraum. Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ wird Endomorphismus oder Selbstabbildung genannt.

Abbildungsmatrix

- lineare Abbildungen lassen sich mittels Basen und Matrizen darstellen
- Endomorphismus braucht nur eine Basis und führt auf eine quadratische Matrix
- andere Basis, i. A. andere Abbildungsmatrix

Beispiel 3

Sei f das Differenzieren. Wir betrachten den Vektorraum der Polynome bis zum Grad 3 und wählen als Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$. Die Abbildungsmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinanten

Idee:

- ordne einer quadratischen Matrix eine Kennzahl (keine Norm) zu
- Schreibeweise $\det(A)$ oder auch $|A|$
- Determinanten lassen sich vielseitig im Umgang mit Matrizen nutzen,
- Nutzen etwa in Bezug auf Invertierbarkeit, ggf. Berechnung der Inversen, Lösung eines linearen Gleichungssystem

Formale Definition:

- mittels Summe über Produkte der Matrixelemente in allen möglichen Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ (Leibniz-Formel)
- Summe über insgesamt $n!$ Produkte mit je n Faktoren
- numerisch nicht stabil für große n

Determinanten

Beispiel 4

Für die einfachen Fälle mit $n \leq 3$ gelten

$$\det\left((a_{11})\right) = |A| = a_{11},$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) &= |A| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Lösung eines LGS mittels Cramerscher Regel:

- für $n = 2$ gilt

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

- für $n = 3$ gilt

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} - b_1 a_{23} a_{32} - b_2 a_{12} a_{33} + b_2 a_{13} a_{32} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{13} a_{22}}{\det(A)},$$
$$x_2 = \frac{-b_1 a_{21} a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + b_2 a_{11} a_{33} - b_2 a_{13} a_{31} - b_3 a_{11} a_{23} + b_3 a_{13} a_{21}}{\det(A)},$$
$$x_3 = \frac{b_1 a_{21} a_{32} - b_1 a_{22} a_{31} - b_2 a_{11} a_{32} + b_2 a_{12} a_{31} + b_3 a_{11} a_{22} - b_3 a_{12} a_{21}}{\det(A)}$$

mit

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Eigenschaften: (Auswahl)

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar, $\det(A) = \det(A^T)$,

$\det(I_{n\times n}) = 1$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$,

Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten A ändert das Vorzeichen von $\det(A)$

Entwicklungssatz: (Laplace)

- in Matrix A Zeile i und Spalte j streichen führt auf die Adjunkte A_{ij}
- dann gilt (Entwicklung nach Spalte j)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

bzw. (Entwicklung nach Zeile i)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Definition 3.2

Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ wird Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genannt, falls ein $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ existiert, mit

$$Ax = \lambda x.$$

Ein solches x wird Eigenvektor zum Eigenwert λ genannt.

Bemerkung 5

Sind $v \in \mathbb{R}^n$ eine Eigenvektor zum Eigenwert λ und $\alpha \neq 0$, so ist auch αv ein Eigenvektor. Somit ergibt sich ein linearer Raum, der Eigenraum zum Eigenwert λ,

$$<v>= \{w \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ mit } w = \alpha v\}.$$

Eigenwerte in der Ökonomie:

- Page-rank Algorithmus
- wirtschaftliche Verflechtungen in abgeschlossenen Systemen, Preisgleichgewichte
- Anteile für nachhaltige Kreislaufwirtschaft
- Einstellen von Marktanteilen/Kaufverhalten

<u>Beispiel</u>: Eigenschwingung eines Gitarrenkörpers

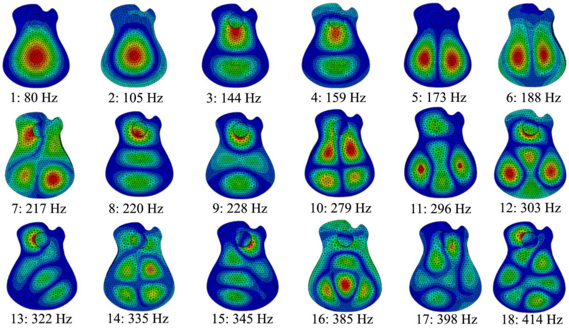


Figure 6. Mode shapes and natural frequency of guitar sound box.

J. Clinton, K. Wani, Open Journal of Acoustics 10(03): 41-50 (2020)

Eigenwerte

Bestimmung der Eigenwerte / Lösbarkeit:

- Umstellen führt auf
$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_{n\times n})x = 0$$
- hat nichttriviale Lösung $x \neq 0$, falls
$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Definition 3.3

Der Term $\det(A - \lambda I)$ ist ein Polynom vom Grad n und wird charakteristisches Polynom genannt. Die Eigenwerte von A sind also die Nullstellen von
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Bemerkungen:

- das charakteristische Polynom besitzt (Vielfachheiten mitzählen) exakt n Nullstellen (Fundamentalsatz der Algebra)
- Lösungen sind mglw. in $\mathbb{C}$ trotzdessen, dass $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Beispiel 5

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 2 \end{aligned}$$

und die Eigenwerte sind folglich

$$\lambda_{1,2} = 2.5 \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 2} = 2.5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}.$$

Beispiel 6

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0.5, \quad \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte

Bemerkung 6

Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix oder eine linksuntere oder rechtsobere Dreiecksmatrix, so stehen die Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen, denn für eine rechtsobere Dreiecksmatrix ist etwa

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\lambda \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\det(A-\lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = a_{ii} \text{ für ein } i \in \{1,\dots,n\}.$$

Diagonalisierung:

- mitunter ist es von Vorteil, eine Basis aus Eigenvektoren zu wählen
- dann ist die Abbildungsmatrix eine Diagonalmatrix
- hat A insgesamt n linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ und sei

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n},\ T(:, i) = v_i$$

die Matrix dieser Eigenvektoren, dann ist

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonalen.

Bemerkungen:

- nicht jede Matrix ist diagonalisierbar
- jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar
- in vielen Anwendungen sind die Eigenvektoren selbst wichtiger als Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit.

Eigenraum:

- ist ein Eigenwert mehrfach, so kann es einen dazugehörigen Eigenraum mit Dimension > 1 geben
- Vielfachheit der Nullstelle = algebraische Vielfachheit
- Dimension des Eigenraums = geometrische Vielfachheit,

$$\text{algebraische Vielf.} \geq \text{geometrische Vielf.} \geq 1$$

Beispiel 7

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ *und* $\lambda_3 = -1$ *und die Eigenräume*

$$V_{1,2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Beispiel 8

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

aus Beispiel 3 besitzt den Eigenwert $\lambda = 0$. Dieser besitzt die algebraische Vielfachheit 4 aber die geometrische Vielfachheit 1. Der Eigenraum ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bestimmung von Eigenwerten und -vektoren

Theoretisch:

- Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Praktisch:

- Berechnung von Determinanten zur Bestimmung von λ_i nur bis $n \leq 4$ sinnvoll
- Berechnung von Nullstellen eines Polynoms vom Grad n für $n > 4$ nicht geschlossen möglich
- Berechnung von Nullstellen eines Polynoms anfällig für Störungen.

Ausweg:

- numerische Approximation der Eigenwerte und -vektoren
- einfachstes Verfahren ist die Potenzmethode

Approximation von Eigenwerten und -vektoren – Potenzmethode

Potenzmethode (survival of the largest):

- wähle Startvektor $x \neq 0$ etwa $x = (1, \ldots, 1)^T$, normiere x
- Iteration:

$$
\begin{aligned}
y &:= Ax \\
r &:= y^T x \\
x &:= y / \|y\|_2
\end{aligned}
$$

- Abbruchkriterium etwa $\|rx - y\|_2 < \varepsilon = 10^{-7}$

Definition 3.4

Der Wert

$$r = \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{y^T x}{1} = y^T x$$

ist eine Näherung für den betragsgrößten Eigenwert und wird Rayleigh-Quotient von x genannt. Weiter ist x eine Näherung an den zugehörigen Eigenvektor

Bemerkungen:

- die Normierung verhindert einen Überlauf
- Nachteile: u.U. rechenaufwendig, liefert nur den betragsgrößten EW
- für Wirtschaftswissenschaften interessiert häufig nur dieser
- häufig führen Anwendungen auf Situationen wie Situation

Konvergenz:

- Voraussetzung ist, dass der betragsgrößte Eigenwert von A einfach ist
- r konvergiert gegen $\lambda_{\max}$ und x gegen einen zugehörigen Eigenvektor
- Konvergenzgeschwindigkeit hängt von $|\lambda_2/\lambda_1|$ ab

Alternatives Vorgehen für andere Norm:

$$r := \frac{y^T x}{x^T x}, \qquad x := \frac{y}{\|y\|_1}$$

Page-rank-Algorithmus

Aufstellen der Übergangsmatrix:

- ein- und ausgehende Links

Webseite	1	2	3	4	5
raus	1	2	1	3	3
rein	3	2	3	1	1

- Übergangsmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

- Lösung $x \in \mathbb{R}^5$ mit $Ax = x$
- Eigenwertproblem.

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -0.341 \pm 0.7668\mathbf{i}, \quad \lambda_{4,5} = -0.1590 \pm 0.2315\mathbf{i}$$

Eigenvektor:

$$\begin{pmatrix} 0.244 \\ 0.3 \\ 0.233 \\ 0.178 \\ 0.044 \end{pmatrix}$$

Ranking:

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5$$

Fragen:

1. Gibt es in solchen Fällen immer einen Eigenwert $\lambda_{\max} = 1$?
2. Gibt es dazu immer einen Eigenvektor mit nichtnegativen Einträgen?

Abgeschlossenes Input-Output-Modell:

- Formulierung des Zusammenhangs zwischen Wirtschaftssektoren $x_1, \ldots, x_n$
- Produktmengen x_i sind untereinander verflochten, keine externen Nachfragen
- Zusammenhang ist linear, also Matrix-Form

$$x = Ax, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ a_{ij} \geq 0\, \forall i, j$$

- a_{ij} gibt an, wieviel von Produkt x_j zur Herstellung von x_i benötigt wird
- es gibt eine Lösung, falls $\det(I_{n \times n} - A) = 0$

Offenes Input-Output-Modell:

- externe Nachfragen $d_1, \ldots, d_n \geq 0$, Zusammenhang lautet

$$x = Ax + d$$

- Voraussetzung für die Existenz einer Lösung ist, dass $\det(I_{n \times n} - A) \neq 0$

W. W. Leontief: *Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States*, Rev Econ Stat 18(3), 105–125, 1936.

W. W. Leontief: *Interrelation of prices, output, savings, and investment*, Rev Econ Stat 19(3), 109–132, 1937.

Abgeschlossenes Input-Output-Modell

Vereinfachtes Modell:

- Güter $G_1, \ldots, G_n$ der Produzenten $P_1, \ldots, P_n$ (Exklusivität)
- festgelegte Zeiteinheit (etwa 1 Jahr)
- Skalierung der Einheiten so, dass je genau ein Gut hergestellt wird
- Produzent P_i benötigt jeweils a_{ij} Einheiten von Gut G_j, also

$$G_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j, \qquad a_{ij} \geq 0$$

- abgeschlossenes Modell (kein Import/Export) und alle Güter werden aufgebraucht

Abgeschlossenes Input-Output-Modell

Definition 3.5

Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tauschmatrix, wenn

$$a_{ij} \geq 0 \;\forall i,j \in \{1,\dots,n\}, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \;\forall j \in \{1,\dots,n\}.$$

Bemerkung 7

Eine solche Matrix wird in anderem Kontext auch left-stochastic matrix genannt.

Satz 3.6

Die Matrix A zum obigen Modell ist eine Tauschmatrix.

Fragen:

- Wie sind die Preise zu wählen?
- Gibt es eine stabile Lösung (Preisverteilung)?

Übersicht

Perron-Frobenius Theorie

Mathematisches Problem:

- gesucht ist eine Lösung von
$$Ax = x$$
- damit suchen wir einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ von A
- Anwendungen z. B. abgeschlossenes Input-output-Modell, Page-rank

Satz 3.7

Sei $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ eine Tauschmatrix. Es gelten:

1. *Die Matrix A besitzt einen komponentenweise nichtnegativen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ und $\lambda = 1$ ist der betragsgrößte Eigenwert von A.*
2. *Ist A irreduzibel, so hat der Eigenraum die Dimension 1. Die Lösung ist also bis auf Skalierung eindeutig.*
3. *Die Komponenten von x sind die Preise der einzelnen Güter in einem Gleichgewicht. Es gibt also eine stabilen Preisverteilung (Gleichgewicht).*
4. *Ist A irreduzibel, so konvergiert jede nichtnegative Preisverteilung gegen den Gleichgewichtspreis.*

Perron-Frobenius Theorie

Definition 3.8

Für eine (möglicherweise nichtsymmetrische) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt $G_A = (V, E)$ der Adjazenzgraph mit der Menge der Knoten $V = \{1, \dots, n\}$ und der Menge der Kanten

$$E = \{(i, j) \in V^2 : \; a_{ij} \neq 0\}.$$

Definition 3.9

Eine Matrix A heißt irreduzibel (oder unzerlegbar), wenn jeder Knoten i durch eine Folge von Kanten mit jedem anderen Knoten j verbunden ist (im Falle einer nichtsymmetrischen Matrix durch eine Folge gleichorientierter Kanten).

Satz 3.10 (Satz von Perron-Frobenius)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ komponentenweise nichtnegativ und irreduzibel, dann gelten

1. *Der betragsgrößte Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A ist einfach.*
2. *Dieser Eigenwert (und nur dieser) besitzt einen komponentenweise positiven Eigenvektor.*

Folgerung aus Satz 3.10:

- ist A reduzibel, so gibt es einen zugehörigen Eigenvektor der komponentenweise „nur“ nichtnegativ ist
- betrachte dazu irreduzible Untermatrizen

Aussagen 1/2 aus Satz 3.7:

- sofern A reduzibel ist, so ist $x \geq 0$ andernfalls gilt $x > 0$ nach Perron-Frobenius
- es gilt $\lambda_{\max} = 1$, denn sei $x \geq 0$ ein Eigenvektor zu $\lambda_{\max}$, so gelten mit $Ax = \lambda_{\max} x$ sowie, da A eine Tauschmatrix mit $\sum_i a_{ij} = 1$ für alle j ist, dass

$$1^T Ax = 1^T(\lambda_{\max} x) = \lambda_{\max} 1^T x$$
$$1^T A = 1^T \quad \Rightarrow \quad 1^T x = \lambda_{\max} 1^T x \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\max} = 1$$

Beweis von Satz 3.7

<u>Aussage 4 aus Satz 3.7</u>:

- sei $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$ eine beliebige nichtnegative anfängliche Preisverteilung mit $\|x\| > 0$
- als Iteration ergibt sich über die Zeit

$$x^{(i+1)} = Ax^{(i)}$$

- da $\lambda_{\max} = 1$ nach Perron-Frobenius einfach ist, sind alle anderen Eigenwerte betragsmäßig kleiner 1
- die Potenzmethode (ergibt sich aus der Iteration) konvergiert gegen den Eigenvektor x zu $\lambda_{\max}$

Übersicht

Modell

- geschlossene Ökonomie (Kühe, Kälber, Korn/Mais)
- Kühe haben begrenzte Lebenszeit, ohne Kühe keine Kälber
- ohne Korn kein neues Getreide, ohne Körner keine Nahrung für die Kühe und Kälber,
- ohne Kühe/Kälber keine Gülle und so weniger neues Korn

Gegenseitige Beeinflussung fürs neue Jahr (geeignete Skalierung, fiktive Werte)

$$\begin{pmatrix} x_{\text{Kühe}} \\ x_{\text{Kälber}} \\ x_{\text{Korn}} \end{pmatrix}^{(\text{neu})} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 & 3 \\ 0.2 & 0 & 1 \\ 1 & 0.05 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{Kühe}} \\ x_{\text{Kälber}} \\ x_{\text{Korn}} \end{pmatrix}^{(\text{alt})}$$

Geschlossenes Modell (Öko-Bauernhof), Kreislaufwirtschaft

Gesucht:

- stabile Relationen (Anzahlen) und gleiche Überproduktion zum Verkauf
- maximaler Gewinn führt auf etwas anderes

Mathematisches Problem:

- Eigenwertproblem

$$Ax = \lambda x$$

- jährlich bleiben $\lambda - 1$ Einheiten jeweils zum Verkauf übrig
- Vereinfachend seien die Skalierungen so, dass alle denselben Gewinn je Einheit
- Gewinn ist also

$$(\lambda - 1)\big(x_{\text{Kühe}} + x_{\text{Kälber}} + x_{\text{Korn}}\big) = (\lambda - 1)\|x\|_1$$

Abgeschlossenes Leontief-Modell

Preise:

- Preise in Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ zusammengefasst
- Herstellungskosten sind $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = (Ax)_i$
- Annahme, jedes Gut wird einmal im Jahr hergestellt, die Einnahmen für Gut i sind also x_i

Stabilität:

$$Ax \leq x$$

Satz 3.11

Seien A eine Tauschmatrix und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Es gilt die Implikation

$$Ax \leq x \quad \Rightarrow \quad Ax = x.$$

<u>Beweis zu Satz 3.11</u>:

- angenommen, es gibt ein j mit $(Ax)_j < x_j$
- sei $1 = (1, \dots, 1)$, dann folgt aus $1^T A = 1^T$, dass $1^T Ax = 1^T x$
- weiter gelten nach Voraussetzung $x \geq 0$ und $(Ax)_i \leq x_i$
- wäre nun tatsächlich $(Ax)_j < x_j$, so folgt wegen $(Ax)_i \leq x_i$, dass die Gleichheit

  $$\sum_{i=1}^{n} (Ax)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

  nicht gelten kann
- dies wäre ein Widerspruch zur Annahme und es kann kein j geben mit $(Ax)_j < x_j$
- folglich gilt $Ax = x$

Offenes Input-Output-Modell:

- externe Nachfragen $d_1, \dots, d_n \geq 0$
- Zusammenhang ist linear, also in Matrix-Form

$$x = Ax + d, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ a_{ij} \geq 0 \,\forall i, j$$

Frage:

Gibt es für jedes $d \in \mathbb{R}^n_+$ eine Lösung

$$x = \big(\underbrace{I_{n \times n} - A}_{B}\big)^{-1} d$$

mit $x_1, \dots, x_n \geq 0$?

Bemerkungen zum LGS:

- wegen $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ gilt
$$b_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j$$
- gilt $B^{-1} \geq 0$ komponentenweise, so ist $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ sofern $d_1, \ldots, d_n \geq 0$
- $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ bedeutet, dass keine Importe nötig sind

Definition 3.12

Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt invers-positiv, wenn B^{-1} existiert und nur nichtnegative Einträge hat.

Satz 3.13

Folgende Aussagen sind äquivalent

(a) *Für jedes $d \in \mathbb{R}_+^n$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Bx = d$ und x ist komponentenweise nichtnegativ.*

(b) *Die Matrix B ist invers-positiv.*

(c) *Alle n Hauptminoren von B sind positiv.*

Eine solche Matrix wird auch als M-Matrix bezeichnet.

Hauptminoren

Definition 3.14

Seien B eine reelle $n \times n$-Matrix und $k \in \{1, \ldots, n\}$ Dann wird

$$\det\left(\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix}\right)$$

der k-te Hauptminor von B genannt.

Beispiel 9

Die Matrix

$$B = I - \begin{pmatrix} 0.45 & 0.25 & 0.15 \\ 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.025 & 0.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.55 & -0.25 & -0.15 \\ -0.1 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.025 & 0.95 \end{pmatrix}$$

hat die Hauptminoren

$$0.55, \quad 0.525, \quad 0.354$$

und ist invers-positiv.

Kaufverhalten

Modell:

- drei Produkte auf dem Markt (A, B, C) im Wettbewerb
- Wahrscheinlichkeiten, dass einem Kauf von Produkt X beim letzten mal zu einem Kauf von Produkt Y beim nächsten mal führt seien

$$\begin{array}{lll} \text{Kauf A} & \Rightarrow & (0.9,\ 0.01,\ 0.01,\ 0.08) \\ \text{Kauf B} & \Rightarrow & (0.01,\ 0.8,\ 0.06,\ 0.13) \\ \text{Kauf C} & \Rightarrow & (0.1,\ 0.1,\ 0.7,\ 0.1) \\ \text{kein Kauf} & \Rightarrow & (0.1,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.6) \end{array}$$

Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.01 & 0.1 & 0.1 \\ 0.01 & 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.01 & 0.06 & 0.7 & 0.1 \\ 0.08 & 0.13 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 8

Allgemein wird ein solches Modell als Markov-Kette bezeichnet.

E. Larek: *Lineare System in der Wirtschaft*, Peter Lang Inter. Verlag der Wissenschaften, Frankfurt a. M., 2009.

Kaufverhalten

Anbindung I an Input-Output-Überlegungen:

- alle Einträge in A sind nichtnegativ, i. d. R. sogar positiv, und kleiner gleich 1
- insbesondere ist A aber auch eine Tauschmatrix
- für eine stabile Verteilung $x = (x_A, x_B, x_C, x_K)^T$ gilt

$$Ax = x$$

Eigenwertproblem zum Eigenwert $\lambda = 1$

Anbindung II an Input-Output-Überlegungen:

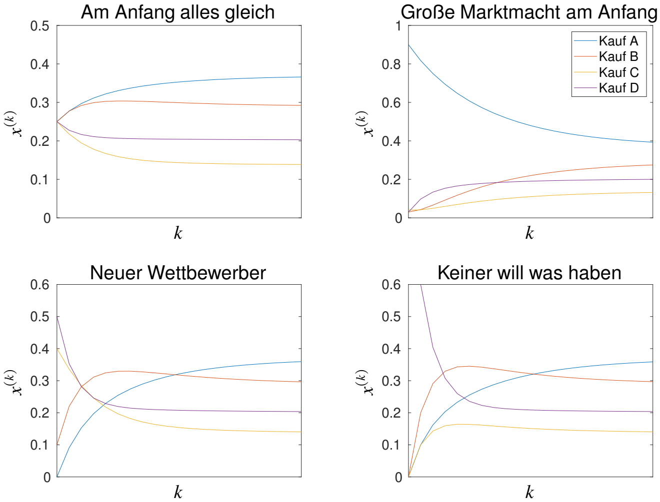
- stabile Verteilung ist typischerweise nicht gesucht / nötig
- stabile Verteilung stellt sich mit der Zeit ein

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} = A^{(k+1)}x$$

- nach Perron-Frobenius und vorherigen Überlegungen konvergiert diese Folge für eine Anfangsverteilung gegen die stabile Aufteilung / Gleichgewicht

Kaufverhalten

Verschiedene Anfangswerte:



$\rightarrow$ alle führen auf dieselbe stabile Aufteilung / Gleichgewicht

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1.0, \quad \lambda_2 = 0.858, \quad \lambda_3 = 0.655, \quad \lambda_4 = 0.487$$

Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.785 \\ 0.373 \\ 0.548 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6405 \\ -0.250 \\ -0.110 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -0.359 \\ -0.576 \\ 1 \\ -0.065 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -0.154 \\ -0.535 \\ -0.312 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung:

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sum_{j=1}^{4} |v_{1j}|} = \begin{pmatrix} 0.369 \\ 0.290 \\ 0.138 \\ 0.203 \end{pmatrix}$$

Übersicht

Rückblick Mathe I:

- Maximierung/Minimierung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- hinreichende Bedingung für ein Maximum/Minimum

$$
\begin{aligned}
&f_{xx}(x^*, y^*) > 0 \text{ und } \left(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right)(x^*, y^*) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x^*, y^*) \text{ lok. Minimum} \\
&f_{xx}(x^*, y^*) < 0 \text{ und } \left(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right)(x^*, y^*) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x^*, y^*) \text{ lok. Maximum} \\
&f_{xx}(x^*, y^*) \neq 0 \text{ und } \left(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right)(x^*, y^*) < 0 \quad \Rightarrow \quad (x^*, y^*) \text{ Sattelpunkt} \\
&f_{xx}(x^*, y^*) = 0 \text{ oder } \left(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right)(x^*, y^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^*, y^*) \text{ keine Aussage möglich,}
\end{aligned}
$$

Definition 3.15

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *heißt* ***positiv definit****, wenn*

$$x^T Ax > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Gilt nur $x^T Ax \geq 0$*, so heißt* A ***positiv semidefinit****. Weiter heißt* A ***indefinit****, wenn*

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^n : \; x^T Ax > 0, \; y^T Ay < 0$$

Satz 3.16 (Charakterisierung einer kritischen Stelle)

Seien x^* *eine kritische Stelle von* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *und* $H_f(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *die Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen. Es gelten*

1. *Ist* $H_f(x^*)$ *positiv definit, so hat* f *in* x^* *ein Minimum.*
2. *Ist* $-H_f(x^*)$ *positiv definit, so hat* f *in* x^* *ein Maximum.*
3. *Ist* $H_f(x^*)$ *indefinit, so hat* f *in* x^* *einen Sattelpunkt.*

Überprüfen der Definitheit:

- seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deren Eigenwerte
- A ist positiv definit, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$
- A ist positiv semidefinit, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$
- A ist indefinit, wenn A positive und negative Eigenwerte hat
- A ist positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind
- $-A$ ist positiv definit, wenn alle ungeraden Hauptminoren von A negativ sind und alle geraden Hauptminoren von A positiv sind

Satz 3.17 (Beschränkung auf $n = 2$)

Seien x^* eine kritische Stelle von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $H_f(x) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen. Es gelten

1. *Ist $H_f(x^*)$ positiv definit (alle Hauptminoren positiv), so hat f in x^* ein Minimum.*
2. *Ist $-H_f(x^*)$ positiv definit (1. HM negativ, 2. HM positiv), so hat f in x^* ein Maximum.*
3. *Ist $H_f(x^*)$ indefinit (1. HM$\neq 0$, 2. HM negativ), so hat f in x^* einen Sattelpunkt.*