Übersicht

1. Differenzengleichung

2. Differentialgleichungen

3. Lineare Algebra in der Ökonomie

4. Lineare Optimierung und Dualität

5. Fixpunktiterationen

6. Literatur

Übersicht

<u>Lineares Optimierungsproblem (LOP)</u>:

- siehe Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften
- Zielfunktion

$$f(x) = c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \to \max / \min$$

- unter den Nebenbedingungen

$$Ax = b, \qquad x \geq 0$$

- mglw. auch unter den Nebenbedingungen

$$Ax \leq b, \qquad x \geq 0$$

Definition 4.1

Die Standardform eines linearen Optimierungsproblem ist

$$Ax = b, \qquad x \geq 0, \qquad c^T x \to \min!$$

Überführen in Standardform eines LOP:

- falls das LOP die Form hat

$$Ax \leq b, \qquad x \geq 0, \qquad c^T x \to \min$$

- Schlupfvariablen $u_i = x_{n+i}$ (u_i ist der Rest von Ressource i) einführen
  $\rightsquigarrow$ aus Ungleichungen werden Gleichungen
- bei $c^T x \to \max$ nutze $(-c)^T x \to \min$

Bestimmung einer optimalen Lösung für die Standardform:

- Simplex-Algorithmus

Beispiel 10 (Umformung eines LOPs in Standardform)

Das Problem

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 10 \\ & & x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & \to & \max \end{array}$$

lautet in Standardform

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 10 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 16 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$-5x_1 - 3x_2 \to \min$$

Lineare Optimierung in der Ökonomie (Auswahl)

Transportproblem:

- ein Gut wird von n Lagerorten zu m Bedarfsorten transportiert
- unterschiedliche Kosten von A nach B
- Minimierung der Kosten

Optimale Zusammenstellung von verarbeiteter Nahrung:

- Nährstoffgehalte bilden die Nebenbedingungen (positiv oder negativ)
- Zielfunktion mittels Kosten für Ausgangsstoffe

Wahl und Gewichtung von Produkten einer Produktpalette:

- Kombinationen an Ausgangsstoffen zu verschiedenen Produkten verarbeiten
- z.B. Milch, Joghurt, Schlagsahne, Saure Sahne, Käse, Eis von einem Hersteller

Problem des Handelsreisenden:

- optimale Route um verschiedene Orte anzufahren
- Zielfunktion auf Basis minimaler Strecke, minimaler Zeit oder minimaler Kosten
- Spezialfall Navigationssystem

Übersicht

Transportproblem

Modell:

- Transport eines Guts von verschiedenen Lagerorten zu verschiedenen Zielorten
- Transportkosten je nach Anfangs- und Zielorten
- minimale Kosten

Eckdaten:

- Vorräte an Lagerorten $v_1, \ldots, v_m$
- Bedarfe an Zielorten $w_1, \ldots, w_n$
- Transportkosten $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, wobei c_{ij} die Transportkosten von i nach j sind

Bemerkung:

- Ausgeglichenheit

$$\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{j=1}^{n} w_j \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{i=1}^{m} v_i \geq \sum_{j=1}^{n} w_j$$

Transportproblem

Optimierungsproblem:

- Transportmatrix $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dabei ist x_{ij} die Transportmenge von i nach j
- Minimierung der Transportkosten, also

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} x_{ij} c_{ij} \quad \to \quad \text{min!}$$

Aufstellen der Bedingungen:

- Vorräte verteilen (alternativ $\leq$ statt $=$)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = v_i,\ i = 1,\dots,m \quad \Leftrightarrow \quad X(i,:) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = v_i,\ i = 1,\dots,m$$

- Waren erhalten (hier ist nur $=$ möglich)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = w_j,\ j = 1,\dots,n \quad \Leftrightarrow \quad (1,\dots,1) \cdot X(:,j) = w_j,\ j = 1,\dots,n$$

- Nichtnegativitätsrestriktionen

$$x_{ij} \geq,\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 1 & & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \dots & & \ddots & \\ & & 1 & & & 1 & & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & \dots & 1 & & & & \\ & & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Kurz:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_{m\times m} & \dots & I_{m\times m} \\ \mathbb{1}_{1\times m} & & \\ & \dots & \\ & & \mathbb{1}_{1\times m} \end{pmatrix}}_{A\in\mathbb{R}^{m+n\times m\cdot n}} \begin{pmatrix} X(:,1) \\ \vdots \\ X(:,n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

Beispiel 11

Vier Hobelwerke ($n = 4$) beziehen Stammware aus drei Sägewerken ($m = 3$). Die Bedarfe und Vorräte (in RM) sind

$$w_1 = 10,\; w_2 = 12,\; w_3 = 8,\; w_4 = 20, \quad v_1 = 11,\; v_2 = 15,\; v_3 = 24.$$

Die Transportkosten (€/RM) sind (Bedarfe in W, Vorräte in V)

	W1	W2	W3	W4	$\sum$
V1	50	105	135	38	11
V2	70	65	61	139	15
V3	111	157	48	95	24
$\sum$	10	12	8	20	

Beispiel 11 (Fortsetzung)

Die Nebenbedingungen sind

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 11 \qquad & x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 10 \qquad & x_{ij} &\geq 0 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 15 & x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 12 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 24 & x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 8 \\
& & x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 20
\end{aligned}
$$

und die Zielfunktion lautet

$$50x_{11} + 105x_{12} + \ldots + 48x_{33} + 95x_{34} \to \text{min!}$$

Demzufolge sind es $m \cdot n$ *Variablen und* $m + n$ *Bedingungen.*

Satz 4.2

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m+n \times m \cdot n}$ hat den Rang $m+n-1$.

Beweis:
Die Matrix A hat nicht den vollen Zeilenrang, denn

$$\big(\underbrace{1,\ldots,1}_{m-\mathit{mal}},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n-\mathit{mal}}\big)A = (0,\ldots,0).$$

Somit gilt rg$(A) \leq m+n-1$.

Um Gleichheit zu zeigen, Streichen wir in A die $m+1$-te Zeile sowie die Spalten $m+2,\ldots,2m, 2m+2\ldots,3m$ usw. und erhalten eine $m+n-1 \times m+n-1$-linksobere Dreiecksmatrix als Untermatrix von A mit einsen auf der Hauptdiagonalen. Diese Matrix ist regulär und somit sind $m+n-1$ Zeilen linear unabhängig. $\square$

Satz 4.3

Das Transportproblem besitzt eine zulässige Lösung, sofern die Bedarfe gedeckt sind.

Beweis:
Mit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{j=1}^{n} w_j$$

ist etwa

$$x_{ij} = \frac{v_i w_j}{\alpha}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

eine mögliche Lösung. Einfaches Nachrechnen zeigt neben $x_{ij} \geq 0$ auch

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{v_i w_j}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i}{\alpha} w_j = w_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{v_i w_j}{\alpha} = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j}{\alpha} v_i = v_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

□

Beispiel 11 (Fortsetzung)

Für unserer Problem ergibt sich auf diese Weise eine Transportvariante als

$$X = \begin{pmatrix} 2.2 & 2.64 & 1.76 & 4.4 \\ 3 & 3.6 & 2.4 & 6 \\ 4.8 & 5.76 & 3.84 & 9.6 \end{pmatrix}$$

Die Transportkosten belaufen sich auf

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{ij} x_{ij} = 4749.8€.$$

Satz 4.4

Das Transportproblem besitzt eine optimale Lösung, sofern die Bedarfe gedeckt sind.

Beweis:
Nach Satz 4.3 existiert eine zulässige Lösung. Der zulässige Bereich ist beschränkt und abgeschlossen (kompakt) und die Zielfunktion ist linear. Demnach existiert eine optimale Lösung. □

Lösung des Transportproblems

Strategie zur Lösung des Transportproblems:

- zwei Stufen
  1. Bestimmung einer zulässigen Lösung
  2. sukszessive Verbesserung der Lösung
- zu 1.: verschiedene Strategien zur Besimmung einer initialen Lösung, z.B. Nord-West, Zeilen-Spalten-Minimum, Spaltenminimum,...
- zu 2.: Simplex allgemein bzw. die Transport-Variante, nutze Dualität

Nord-West-Variante:

- fülle die Tabelle von links oben nach rechts unten mit maximalen Kapazitäten auf
- gehe Zeileweise vor
- offensichtlicher Nachteil: Kostenwerte bleiben außen vor

Beispiel 11 (Fortsetzung, Nord-West-Variante)

Für unser Problem ergibt sich beim Matrixminimum-Verfahren eine Verteilung der Mengen

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Die Transportkosten belaufen sich auf

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{ij} x_{ij} = 3656€.$$

Initiale Lösung des Transportproblems

Matrixminimum:

- suche minimalen Wert in C, nutze maximale Transportmenge
- fahre mit nächstkleinerem Wert fort usw.

Beispiel 11 (Fortsetzung, Matrixminimum-Variante)

Für unser Problem ergibt sich beim Matrixminimum-Verfahren eine Verteilung der Mengen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 11 \\ 3 & 12 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Die Transportkosten belaufen sich auf

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{ij} x_{ij} = 3424€.$$

Beispiel 11 (Fortsetzung, optimale Lösung)

Mittels Simplex-Algorithmus lässt sich die optimale Verteilung bestimmen als

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

Die Transportkosten belaufen sich auf

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{ij} x_{ij} = 3396€.$$

Übersicht

2D-Probleme:

- grafisch lösbar
- zulässiger Bereich wird festgelegt und eingezeichnet
- Zielfunktion beschreibt Gerade $ax + b$ mit Variable b
- grafische Maximierung bzw. Minimierung durch Verschieben
- Überführung in Standardform nicht nötig

Beispiel 12 (Grafische Lösung)

Für zwei Produktmengen $x_1 \geq 0$ *und* $x_2 \geq 0$ *gelten die Bedingungen*

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \end{array}$$

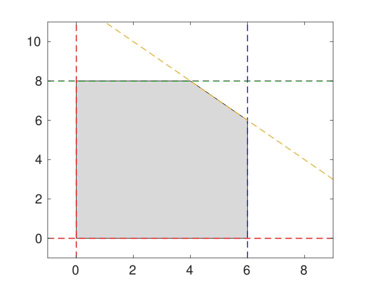
und es wird die Lösung mit maximalem Gewinn $f(x) = 8x_1 + 3x_2$ *gesucht.*

Beispiel 12 (Grafische Lösung)

Für zwei Produktmengen $x_1 \geq 0$ *und* $x_2 \geq 0$ *gelten die Bedingungen*

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 12\,. \end{array}$$

und es wird die Lösung mit maximalem Gewinn $f(x) = 8x_1 + 3x_2$ *gesucht.*



Beispiel 12 (Grafische Lösung)

Für zwei Produktmengen $x_1 \geq 0$ *und* $x_2 \geq 0$ *gelten die Bedingungen*

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 12\,. \end{array}$$

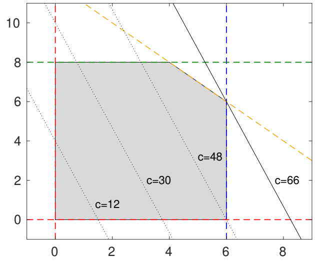
und es wird die Lösung mit maximalem Gewinn $f(x) = 8x_1 + 3x_2$ *gesucht.*

$$8x + 3y \to \max$$

$$8x + 3y = c \to \max$$

$$y = \frac{c}{3} - \frac{8}{3}x, \quad c \to \max!$$

optimale Lsg.: $x = 6,\ y = 6,\ c = 66.$



Optimale Lösung in einer Ecke

Satz 4.5 (Grundlage zur Bestimmung der Lösung)

Besitzt das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ c^T x &\to \min / \max \end{aligned}$$

eine zulässige Lösung und ist nicht unbeschränkt, so wird das Optimum in einer Ecke des zulässigen Bereichs angenommen.

Bemerkung 9

Wird die Lösung in zwei (oder mehr) Ecken angenommen, so lösen alle Punkte auf der Strecke dazwischen das LOP (bzw. die Teilmenge der aufspannenden Ebene usw.).

Einfache Probleme mit n Variablen:

- rechnerisch lösbar
- Zielfunktion für alle Ecken auswerten, optimale Ecke wählen
- Vorgehen nicht empfehlenswert!

Was bedeutet eine Ecke?

- zunächst für
$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m \le n$$
- wähle Teilmenge an Indizes $I \subset \{1, \dots, n\}$ mit $|I| = m$
- löse
$$Ax = b \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{wobei} \quad x_j = 0 \quad \text{für alle} \quad j \notin I$$
- dieses System hat m Gleichungen und m Variablen, also eine eindeutige Lösung
- Indizes in I werden Basisvariablen genannt, alle $j \notin I$ sind Nicht-Basisvariablen

Wieviele Ecken gibt es?

- Auswahl von m Indizes aus $\{1, \dots, n\}$, also
$$\binom{n}{m} \text{ Ecken}$$
- eine Ecke muss nicht zulässig sein, $x \ge 0$ beachten.

Basisvariablen

Vor Transformation in Normalform:

- in der Anwendung oft

$$Ax \leq b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

In Normalform:

- pro Ungleichung eine Schlupfvariable
- in Normal gilt

$$\left(A \; I_{m \times m}\right) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = b, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

- nun insgesamt $n + m$ Variablen,also

$$\binom{n+m}{m} \text{ Ecken}$$

Basisvariablen

Beispiel 13

Für unser Transportproblem mit $n = 12$ *Variablen und* $m = 6$ *nötigen Gleichungen (eine ist redundant) ergeben sich*

$$\binom{12}{6} = 924 \text{ Ecken} = \# \text{ lineare Gleichungssysteme.}$$

Wären es Ungleichungen, so sind es

$$\binom{12+6}{6} = 18\,564 \text{ Ecken} = \# \text{ lineare Gleichungssysteme.}$$

Idee:

- zulässiger Bereich ist ein Polytop (also konvex)
- Optimum wird (u.a.) in einer Ecke des zulässigen Bereichs angenommen
- entsprechende Kombination aus Basisvariablen finden

Basis- und Nichtbasisvariablen (für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \leq n$):

- Unterteilung der n Variablen in m BV und $n - m$ NBV
- NBV auf null, zulässige Basislösung mit den BV $\rightarrow$ Ecke des zul. Bereichs

Verfahren (2 Phasen):

- Bestimmung einer zulässigen Lösung (Phase I)
- Iterarion durch Tausch einer BV gegen eine NBV (Phase II)
  (im Sinne des zulässigen Bereichs werden benachbarte Ecken durchlaufen)
- Funktionswert verschlechtert sich pro Iteration nicht
  $\rightarrow$ stop nach endlich vielen Schritten
- oft wird mit den Schlupfvariablen als BV gestartet

Beispiel 14

Produktion:

- $n = 3$ *verschiedene Produkte herstellen,*
- *unter Verwendung von* $m = 4$ *Produktionsmitteln,*
- *Produktionsmittel nur beschränkt verfügbar*

Verbrauch / Grenzen:

Produktions-mittel	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Kapazität
1	1	3	2	30
2	4	2	1	25
3	3	4	4	45
4	2	3	5	50

Gewinne je Produkteinheit: 5, 8, 4.

Aufgabe:

- *Gesucht sind Produktionsmengen mit maximalem Gewinn.*

Beispiel 14

Mathematische Formulierung:

- *Zielfunktion*

$$f(x) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 \to \max$$

- *unter den Nebenbedingungen*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 30 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 45 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

- *kanonische Form (Standardform eines LOP)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 45 \\ 50 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = (5,\ 8,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)x \to \max$$

In 2 Schritten zum Gipfel

1,00	3,00	2,00	1,00	0,00	0,00	0,00	30,00	10,00
4,00	2,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	25,00	12,50
3,00	4,00	4,00	0,00	0,00	1,00	0,00	45,00	11,25
2,00	3,00	5,00	0,00	0,00	0,00	1,00	50,00	16,67
5,00	8,00	4,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

0,33	1,00	0,67	0,33	0,00	0,00	0,00	10,00	30,00
3,33	0,00	-0,33	-0,67	1,00	0,00	0,00	5,00	1,50
1,67	0,00	1,33	-1,33	0,00	1,00	0,00	5,00	3,00
1,00	0,00	3,00	-1,00	0,00	0,00	1,00	20,00	20,00
2,33	0,00	-1,33	-2,67	0,00	0,00	0,00	-80,00	

0,00	1,00	0,70	0,40	-0,10	0,00	0,00	9,50
1,00	0,00	-0,10	-0,20	0,30	0,00	0,00	1,50
0,00	0,00	1,50	-1,00	-0,50	1,00	0,00	2,50
0,00	0,00	3,10	-0,80	-0,30	0,00	1,00	18,50
0,00	0,00	-1,10	-2,20	-0,70	0,00	0,00	-83,50

Bemerkungen:

- Basisvariablen – wo Einheitsmatrix steht, hier zu Beginn Spalten 4-7
- Werte der Basisvariablen = rechte Seite
- Nichtbasisvariable – alle anderen, sind immer gleich 0
- bei NBV stehen nichttriviale Preise, bei BV sind c-Werte=0
- Maximalwert = minus letzter Eintrag in letzter Zeile

Abbruch des Algorithmus:

- optimale Lösung nach endlich vielen Schritten oder
- wenn kein c-Werte mehr positiv ist
- Problem besitzt keine zulässige Lösung

Simplex-Algorithmus

Schreibeweise im Tableau:

- Matrix $M \in \mathbb{R}^{m+1 \times n+m+1}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} A & I_{m\times m} & b \\ c^T & 0_{1\times m} & G \end{pmatrix}$$

- Geweinn G ist zu Beginn 0
- Transformation des gesamten Tableaus

Simplexschritt:

- eine NBV wird BV, dafür fliegt eine BV heraus
- Auswahl der neuen BV: aktuelle NBV mit größtem c-Wert
- Auswahl der zu killenden BV: diejenige, für die zuerst eine Ressource ausgeht
- Rechnung: Gauß-Schritte, um bei neuer BV eine Eins und sonst Nullen zu erzeugen

Schritt 1 im Beispiel:

- neue BV wird x_2, denn 8.00 ist Maximum aller c-Werte
- ersetzt wird x_4, denn x_4 geht als erstes aus
  ($30/3 = 10$, $25/2 = 12.5$, $45/4 = 11.25$ und $50/3 = 16.67$, gelbe Spalte)
- wichtigste Größe ist das Kreuzelement M_{12}
  Spalte 2 wird BV, in Zeile 1 geht die Ressource zuerst zur Neige
- Zuordnung M_{12}, denn 1 wird neu BV und 2 wird NBV
- in Zeile 1 wird alles durch M_{12} geteilt

$$M_{1j} = \frac{M_{1j}}{M_{12}}, \quad j = 1, \ldots, 8$$

- in allen anderen Zeilen ergeben sich (Rechnungen mit Bezug zu Z. 1 und Sp. 2)

$$M_{ij} = M_{ij} - M_{1j}\frac{M_{i2}}{M_{12}}, \quad i = 2, \ldots, 5,\ j = 1, \ldots, 8$$

Schritt 2 im Beispiel:

- neue BV wird x_1, denn 2.33 ist Maximum aller c-Werte
- ersetzt wird x_5, denn x_5 geht als erstes aus
  ($5/3.33 = 1.5$, $5/1.67 = 3$ und $20/1 = 20$, gelbe Spalte)
- neues Kreuzelement ist M_{21}, Spalte 1 wird BV, in Zeile 2 ist zuerst Schluß
- in Zeile 2 wird alles durch M_{21} geteilt

$$M_{2j} = \frac{M_{2j}}{M_{21}}, \quad j = 1, \ldots, 8$$

- in allen anderen Zeilen ergeben sich (Rechnungen mit Bezug zu Z. 2 und Sp. 1)

$$M_{ij} = M_{ij} - M_{2j}\frac{M_{i1}}{M_{21}}, \quad i = 1, 3, 4, 5, \; j = 1, \ldots, 8$$

Lösung des LOP aus Beispiel 12:

1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	6,00	6,00
0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	8,00	#DIV/0!
1,00	1,00	0,00	0,00	1,00	12,00	12,00
8,00	3,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	6,00	#DIV/0!
0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	8,00	8,00
0,00	1,00	-1,00	0,00	1,00	6,00	6,00
0,00	3,00	-8,00	0,00	0,00	-48,00	

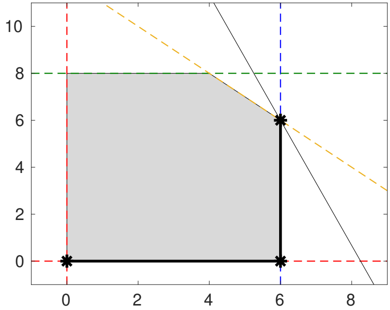
1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	6,00
0,00	0,00	1,00	1,00	-1,00	2,00
0,00	1,00	-1,00	0,00	1,00	6,00
0,00	0,00	-5,00	0,00	-3,00	-66,00

Bemerkung 10

Wie im vorherigen Beispiel bleibt auch hier eine Schlupfvariable mit positiven Wert übrig, da es 2 Variablen und 3 Ungleichungen sind. Dieser „Rest“ in der offenen Rechnung ist die BV 5.

Weg der Optimierung:

- Start bei $(0,0)$, da nur Schlupfvariablen als BV gewählt
- als Nachbarecken kommen $(6,0)$ und $(0,6)$ infrage, erstere hat den höheren Zugewinn
- der zweite Schritt ist der letzte, denn von $(6,6)$ aus wird es nur schlechter
- die grüne Grenze wird nicht berührt, dies gleicht die Schlupfvariable aus



Übersicht

Duale Optimierung

<u>Dualität</u>:

- Verbindung zwischen 2 Optimierungsproblemen
- Verbindung über Lösbarkeit bzw. zwischen unbeschränktem und leerem zulässigen Bereich
- Berechnung von Schattenpreisen

<u>Umkehrung von Relationszeichen (im Sinne der Dualität)</u>:

$$
\begin{array}{ccc}
„\leq“ & \leftrightarrow & „\geq“ \\
„\geq“ & \leftrightarrow & „\leq“ \\
„=“ & \leftrightarrow & „\bowtie“ \\
„\bowtie“ & \leftrightarrow & „=“
\end{array}
$$

Duale Optimierung

Primales Optimierungsproblem (P):

$$A x \; \mathcal{R} \; b$$
$$0 \; \mathcal{S} \; x$$
$$c^T x \to \max$$

Dimensionen:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x, c \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m$$

Relationen:

$$\mathcal{R} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathcal{S} \in \mathbb{R}^n$$

Duales Optimierungsproblem (D):

$$A^T y \; \mathcal{S}^D \; c$$
$$y \; \mathcal{R}^D \; 0$$
$$b^T y \to \min$$

Dimensionen:

$$y \in \mathbb{R}^m$$

Umgekehrte Relationen:

$\mathcal{R}^D \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{S}^D \in \mathbb{R}^n$ Umkehrungen zu $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ (jeweils komponentenweise)

Bemerkung 11

Das zu D duale Problem ist wieder das primale Problem P.

Einfacher Fall:

- Primales Optimierungsproblem (P)

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ 0 &\leq x \\ c^T x &\to \max \end{aligned}$$

- Duales Optimierungsproblem (D)

$$\begin{aligned} A^T y &\geq c \\ y &\geq 0 \\ b^T y &\to \min \end{aligned}$$

- Standardfall zueinander dualer Optimierungsprobleme

LOP aus Beispiel 14:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 30 \\
4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 25 \\
3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 45 \\
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\
0 \leq x_1, x_2, x_3&, \\
(5, 8, 4)x \to \max&.
\end{aligned}
$$

Duales Optimierungsproblem:

$$
\begin{aligned}
y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 &\geq 5 \\
3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 3y_4 &\geq 8 \\
2y_1 + y_2 + 4y_3 + 5y_4 &\geq 4 \\
y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0, \\
(30, 25, 45, 50)y \to \min&.
\end{aligned}
$$

Optimale Lösungen:

$$x = (1.5,\ 9.5,\ 0), \qquad c^T x = 83.5,$$

$$y = (2.2,\ 0.7,\ 0,\ 0), \qquad b^T y = 83.5,$$

Satz 4.6 (Dualitätstheorem, zentrale Aussagen zur Dualität)

Wir betrachten die beiden zueinander dualen Optimierungsprobleme P und D.

1. *Haben beide Probleme zulässige Lösungen, so gilt für zwei zulässige Lösungen* x *von P und* y *von D, dass*
$$c^T x \leq b^T y.$$
2. *Hat das primale Problem eine optimale Lösung, so hat auch das duale eine optimale Lösung und es gilt*
$$c^T x^* = b^T y^*.$$
3. *Ist das primale Problem unbeschränkt, so besitzt das duale Problem keine zulässige Lösung.*
4. *Besitzt das primale Problem keine zulässige Lösung, so ist das duale Problem unbeschränkt.*

Duale Optimierung

Was haben die beiden optimalen Lösungen miteinander zu tun?

Schattenpreise:

- seien x^* und y^* Lösungen von P und D
- Annahme einer Änderung der rechten Seite der Ungleichung k von P
- y_k^* ist Faktor der Änderung des optimalen Wertes

Beispiel:

- P und D von Folie 147
- Änderung der Verfügbarkeit von Ressource 1 von 30 auf 31 führt auf

$$\max c^T x = 83.5 + 2.2 \cdot 1$$

- Änderung der Verfügbarkeit von Ressource 3 von 45 auf 46 führt auf

$$\max c^T x = 83.5 + 0 \cdot 1,$$

denn die dritte Ressource wird nicht ausgeschöpft

Satz 4.7 (Komplementaritätslemma)

Seien x und y zulässige Lösungen von P und D. Dann gilt $c^T x = b^T y$ genau dann, wenn

$$\left(A^T y - c\right)_j x_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$\left(b - Ax\right)_i y_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

gelten.

Beispiel:

- P und D von Folie 147
- für P werden die ersten beiden Ressourcen verbraucht
- für D werden ebenfalls die ersten beiden Ressourcen verbraucht
- weiter sind $x_3^* = 0$ und $y_3^* = y_4^* = 0$
- also sind alle 5 Gleichungen 0

Übersicht

Support-vector machine

Support-vector machine (SVM):

- Methode des maschinellen Lernens (KI)
- Erlernen eines Modells anhand von Trainingsdaten
- binäre Klassifizierung

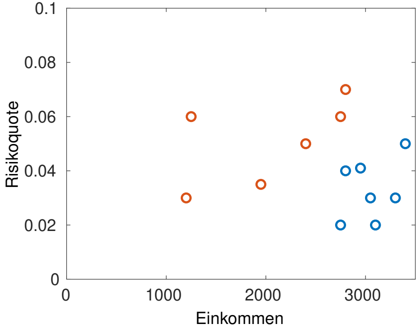
Mathematische Umsetzung:

- jeweils n Kennwerte zur Entscheidungsfindung, Punkte in $\mathbb{R}^n$
- zu Trainingsdaten (und Testdaten) sind Zuordnungen (etwa rot/blau) bekannt
- Bestimmen einer Trennebene E im $\mathbb{R}^n$
- Zuordnung/Klassifizierung neuer unbekannter Daten anhand der Trennebene
- zur Bestimmung von E sind nur wenige Datenpunkte nötig (support-vectors)

Support-vector machine

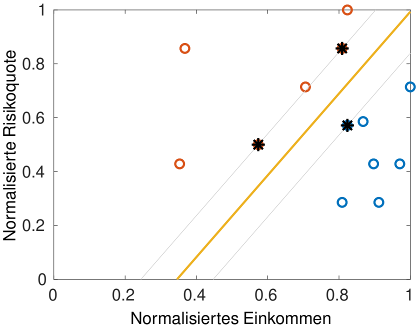
Beispiel Kreditvergabe;

- nur die beiden Parameter Risikoquote/Schufa und monatliches Einkommen
- 13 Trainingsdatensätze
- gesucht ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ als Trennebene



Ziel:

- neues Objekt soll einer der beiden Klassen zugeordnet werden
- minimale Abstände zu den Datenpunkten sollen maximal werden (min-max-Prinzip)
- möglichst breiter „neutraler Bereich“



Voraussetzung:

- linear trennbare Daten

Vorüberlegungen:

- gegebene Daten zu 2 Klassen $(-1, 1)$

$$x_i \in \mathbb{R}^n,\ y_i \in \{-1, 1\}, \quad i = 1, \ldots, m$$

- gesucht ist Ebenengleichung zur Trennung ($n + 1$ Variablen)

$$E:\ w^T x = b, \qquad w \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}$$

- Bedingungen

$$y_i(w^T x_i - b) \geq 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

Neutraler Bereich:

- Ebenen E_1 und E_2 sind parallel zu E und treffen je mind. einen supporting vector
- E_1 anliegend an einen SV der Klasse zu $y_i = 1$ lautet

$$E_1: \; w^T x - b = 1$$

- E_2 anliegend an einen SV der Klasse zu $y_i = -1$ lautet

$$E_2: \; w^T x - b = -1$$

Abstand zwischen E_1 und E_2:

- Differenz der vorzeichenbehafteten Abstände der Ebenen zum Ursprung

$$d(E_1, E_2) = \tilde{d}(0, E_1) - \tilde{d}(0, E_2) = \frac{b+1}{\|w\|_2} - \frac{b-1}{\|w\|_2} = \frac{2}{\|w\|_2} \to \max!$$

- für die Optimierung besser ist

$$\|w\|_2^2 \to \min!$$

Nebenbedingungen des OP:

- Bedingungen sind

$$\begin{aligned} (+1): &\quad w^T x_i - b \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -w^T x_i + b \leq -1 \\ (-1): &\quad w^T x_i - b \leq -1 \end{aligned}$$

- in Matrixform

$$(-x_i^T,\ 1) \begin{pmatrix} w \\ b \end{pmatrix} \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad (x_i^T,\ -1) \begin{pmatrix} w \\ b \end{pmatrix} \leq -1$$

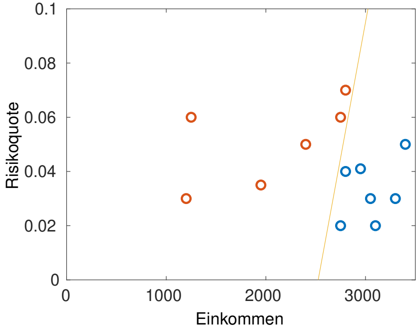
- zusammengefasst in $A \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ (jetzt sortiert nach Klasse)

$$\begin{aligned} A(\ell,:) &= (-x_\ell^T,\ 1),\ b_\ell = -1 \qquad \forall \ell \in \{1, \ldots, m\} \text{ mit } y_\ell = 1, \\ A(\ell,:) &= (x_\ell^T,\ -1),\ b_\ell = -1 \qquad \forall \ell \in \{1, \ldots, m\} \text{ mit } y_\ell = -1 \end{aligned}$$

Zielfunktion des OP (nichtlinear):

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \to \min!$$

Ergebnis (1) zu den Kreditdaten:

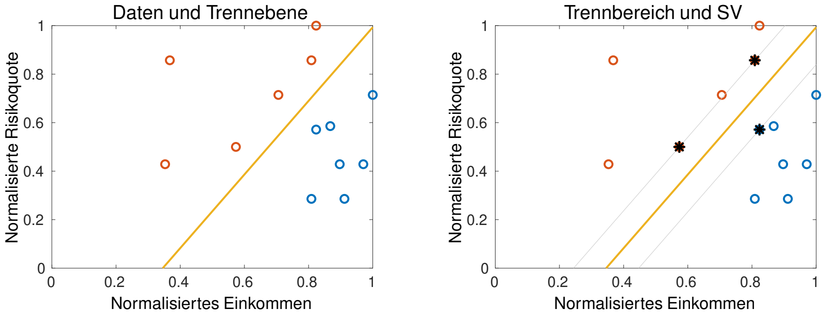


Verbesserung:

- Parameter Risikoquote und Einkommen haben verschiedene Größenordnungen
- Skalierung zu normalisierten Parametern liefert besseres Ergebnis
- Normalisierung etwa, sodass

$$\forall i = 1, \ldots, n : \max_{j=1,\ldots,m} ((x_i)_j) = 1$$

Ergebnis (2) mit normalisierten Parametern:



Optimale Parameter:

$$w = (6.49,\ -9.86), \quad b = -3.41$$

Ebenengleichung:

$$E = \{x:\ 6.49x_1 - 9.86x_2 + 3.41 = 0\}$$

Vorabskalierung zur Klassifizierung eines neuen Punktes:

$$x = (x_1, x_2) \quad \rightarrow \quad \tilde{x} = \left(\frac{x_1}{3400}, \frac{x_2}{0.07}\right)$$

Vorgehensweise SVM:

- Voraussetzung sind linear trennbare Daten
- Teilung der Daten in Trainings- und Testdaten
- Bestimmung einer Ebene mittels Trainingsdaten

$$E: \; w^T x = b$$

- Validierung mittels Testdaten
- neue Daten werden mittels $y = w^T x - b$ klassifiziert in 1, falls $y < 0$, bzw. -1.

Realität:

- Daten häufig nicht linear trennbar
- mitunter mehr als eine Klasse

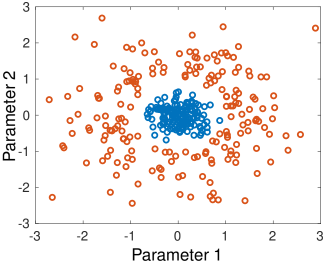
Nichttrennbare Daten

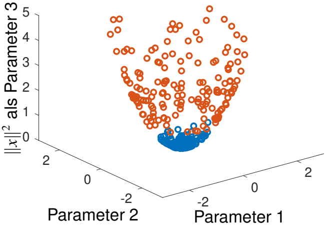
<u>Daten nicht linear trennbar:</u>

- mglw. mit einfachen zusätzlichen (redundanten) Parametern linear lösbar
- mglw. mittel kernel-Funktionen lösbar
- Ausreißer mit Straffunktionen niedrig gewichten

<u>Beispiel:</u>

- hier einfach $\|x\|^2$ als zusätzlichen Parameter nutzen
- Trennebene ist z.B. $z = 1$.





Erweiterung für mehr Klassen:

- SVM für binäre Klassifizierung
- Klassifizieren für r Klassen mittels Serie von SVM-Entscheidungen

One-against-one Strategie:

- alle Vergleiche untereinander, insgesamt $r(r-1)/2$ SVM-Entscheidungen
- jeweiligen Entscheidungswerte werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert
- Aufsummieren der Werte für ein i gegen alle j liefert den Vergleichswert b_i
- Klassifizierung als $\arg\max b$

One-against-all Strategie:

- Aufbau von r SVM, jeweils für jede Klasse eine
- höchster Vergleichswert liefert Klassifizierung