Übersicht

Übersicht

Logistische Gleichung

Entwicklung einer Population:

- Modellierung in diskreten Zeitabschnitten (Jahre, Generationen)
- Zuwachs/Vermehrung proportional zur aktuellen Größe
- Verluste durch Beschränkung („gesunde“ Populationsgröße L)
- zur Vereinfachungen seien beide Vorfaktoren gleich

Modell 1 (klassische Variante)

$$x_{n+1} = rx_n - rx_n^2 = rx_n(1 - x_n)$$

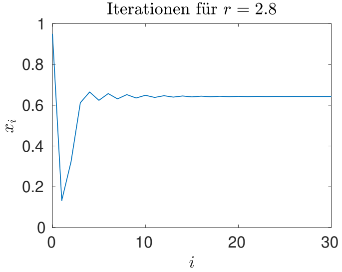
Modell 2 (Variante mit $L = 1$)

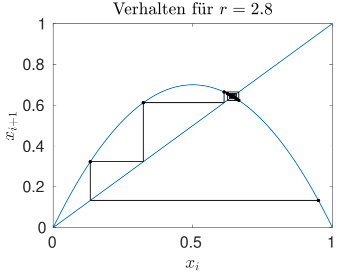
$$y_{n+1} = y_n + ry_n - ry_n^2$$

Fixpunktiteration für die logistische Gleichung

<u>Beispielentwicklung</u>:

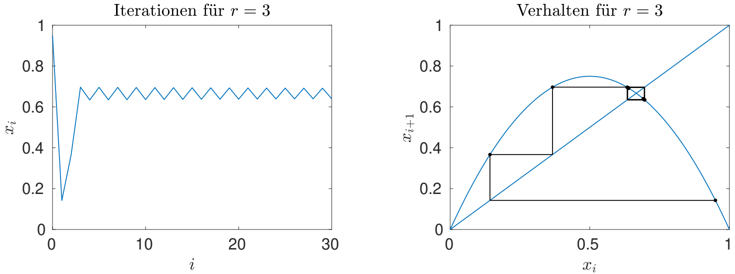
- Parameter $x_0 = 0.95$, $r = 2.8$
- Konvergenz gegen einen Fixpunkt





Beispielentwicklung:

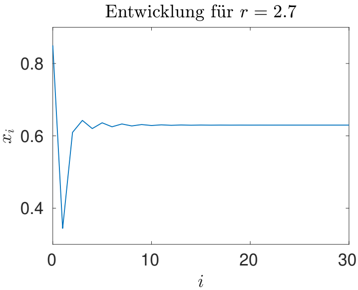
- Parameter $x_0 = 0.95$, $r = 3.0$
- alternierend zwischen zwei Häufungspunkten

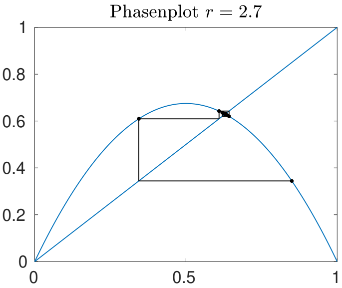


Fixpunktiteration für die logistische Gleichung

Abhängigkeit von r:

- Verhalten der Iterierten, Start jeweils bei $x_0 = 0.85$
- Entwicklung bis $k = 30$ sowie Phasenplot (x_i, x_{i+1}) für variierendes $r \in [2.7,\ 3.6]$



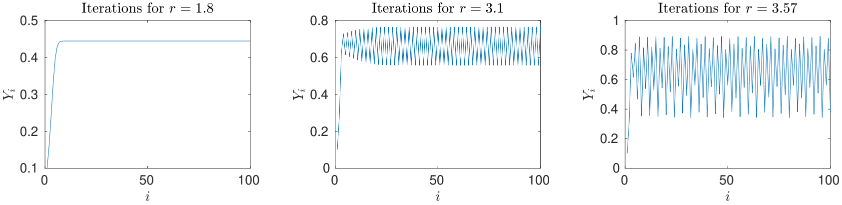


Vergleich dreier Entwicklungen:

- wir betrachten $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ zu $x_0 = 0.1$ und

$$\varphi(x) = rx - rx^2 = rx(1-x),$$

- jeweils kurze Warmlaufphase von maximal 10 Schritten
- für $r = 1.8$ ein Fixpunkt
- für $r = 3.1$ alternierend mit zwei Häufungspunkten
- für $r = 3.57$ alternierend mit vier Häufungspunkten



Fixpunktiteration für die logistische Gleichung

Analyse der Fixpunkte:

- gelten soll $x^* = \varphi(x^*) = rx^*(1 - x^*)$
- Fixpunkte bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 1 - \frac{1}{r}$

Alternierende Häufungspunkte (Periode 2):

- die Forderung $x^* = \varphi(\varphi(x^*))$ führt auf

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{r}, \quad x_{3,4} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$$

- offensichtlich muss $r^2 - 2r > 3$ also $r > 3$ sein
- für $r = 3.1$ sind dies

$$x_2 = 0.6774193548, \quad x_3 = 0.5580, \quad x_4 = 0.7646$$

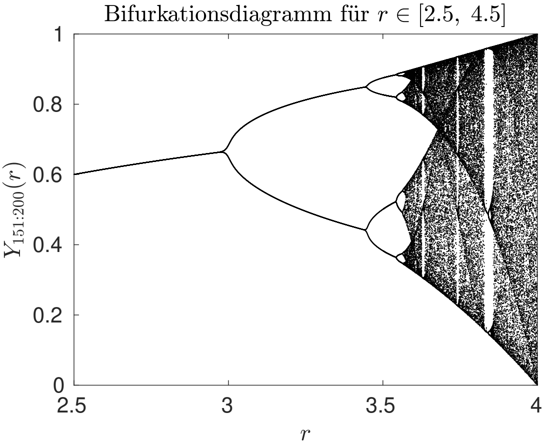
Alternierende Häufungspunkte (Periode 4):

- die Forderung $x^* = \varphi^{(4)}(x^*)$ führt auf die Werte

$$x_5 = 0.354, \quad x_6 = 0.414, \quad x_7 = 0.720, \quad x_8 = 0.866$$

<u>Feigenbaum Diagramm (Bifurkation)</u>:

- Iteration $\varphi(x) = rx(1-x)$,
- Darstellung der Iterierten x_i für $r \geq 150$,
- mehrere alternierende Situationen.



Fixpunktproblem für die logistische Gleichung

<u>Analyse der Fixpunkte</u>:

- gelten soll $x^* = \varphi(x^*)$ und somit

$$x^* = rx^*(1 - x^*) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1 - \frac{1}{r}$$

- Analyse der Stabilität mittels

$$\varphi'(x) = r(1 - x) - rx = r(1 - 2x)$$

- Stabilität nur für $|\varphi(x^*)| < 1$, Banach'scher Fixpunktsatz
- x_1 ist uninteressant, für x_2 gilt

$$\varphi'(x_2) = r(1 - 2 + \frac{2}{r}) = 2 - r$$

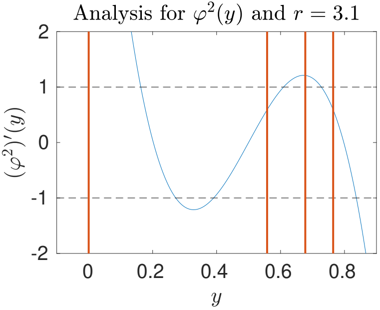
und offensichtlich ist der FP nur für $1 < r < 3$ stabil

Analyse der Häufungspunkte:

- für Häufungspunkte der Periode 2 gilt $\varphi^2(x) = r(rx(1-x))(1-rx(1-x))$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{r}, \quad x_{3,4} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$$

- Analyse der Stabilitäts mittels $(\varphi^2)'(x)$, e. g. für $r = 3.1$ numerisch



- nur $y_3 = 0.558$ und $y_4 = 0.765$ sind stabile Häufungspunkte
- $y_1 = 0$ und $y_2 = 0.677$ sind weder als Fixpunkte stabil noch als Häufungspunkte

Fixpunktproblem für die logistische Gleichung

Bemerkungen:

- ab circa $r = 3.57$ ergeben sich nur selten stabile Häufungspunkte
- davor sind es bis zu 6 oder 12 Häufungspunkte
- danach herrscht vermeintlich Chaos
- für $r \approx 3.84$ nochmal eine Verzweigung (stabile HP)

Chaos:

- für bestimmte Werte reagieren die Lösungen instabil auf die Anfangswerte
- d.h. kleine Änderungen in einer (beliebigen) Iterierten führen zu nicht kleinen Änderungen danach
- dies schließt automatisch Häufungspunkte (stabil) aus und bedeutet Chaos

Übersicht

Newton-Verfahren 1D

<u>Iteration des Newton-Verfahrens</u>:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Definition 5.1

Sei $(x_i)_{i=0,1,2,\ldots}$ eine Folge mit $x_i \in \mathbb{R}^n$, die gegen $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ konvergiert und sei $x_i \neq \bar{x}$ für alle i. Weiter sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf R^n.

Die Folge heißt konvergent gegen x^* mit mindestens der <u>Konvergenzordnung p</u>, falls es ein $c > 0$ gibt mit

$$\|x_{i+1} - x^*\| \leq c\|x_i - x^*\|^p$$

für alle hinreichend großen $i \in \mathbb{N}$.

Satz 5.2

Sei f in einer Umgebung $U = (a,b)$ um x^* zweimal stetig differenzierbar und es gelte $f'(x^*) \neq 0$. Dann gilt für $x_k \in U$, dass

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(\xi_k)}(x_k - x^*)^2, \quad \xi_k \in U.$$

Newton-Verfahren für Systeme

Newton-Verfahren nD:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta = x_k - \big(J_f(x_k)\big)^{-1} f(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen erster Ordnung von f:

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Mögliches Abbruchkriterium:

$$\|f(x_k)\|_2 \leq \varepsilon_f \quad \text{oder} \quad \|\Delta\|_2 < \varepsilon_x$$

mit $\varepsilon_f, \varepsilon_x > 0$, z.B. $\varepsilon = 10^{-6}$, $\varepsilon_x = 10^{-4}$

Newton-Verfahren für Systeme

<u>Beispiel (Fraktal)</u>:

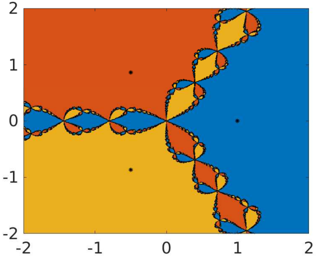
- 2×2-Gleichungssystem

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- drei Lösungen

$$(1,0), \qquad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- gegen welche Lösung das Newton-Verfahren konvergiert, hängt vom Startwert ab
- Iterationen für Startwerte in $[-2,2] \times [-2,2]$



Beispiel:

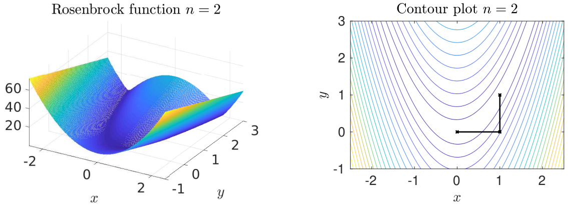
- Rosenbrock-Funktion (Lösung ist $x^* = (1,1)^T$)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ 10(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad J_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -20x_1 & 10 \end{pmatrix}$$

- Newton-Verfahren für $x_1 = (0,0)^T$ führt auf

$$x^{(1)} = x^{(0)} - J_f(x^{(0)})^{-1} f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - J_f(x^{(1)})^{-1} f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Variationen des Newton-Verfahrens

Gedämpftes Newton-Verfahren:

- nicht den vollen Schritt machen, sondern nur einen Teil
- mit $0 < \lambda \leq 1$ im Eindimensionalen also

$$x_{i+1} = x_i - \lambda \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- analog für Systeme

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \big(J_f(x_k)\big)^{-1} f(x_k)$$

- z.B. λ solange halbieren, bis

$$\|f\big(x_k - \lambda \big(J_f(x_k)\big)^{-1} f(x_k)\big)\| \leq (1 - \frac{\lambda}{2}) \|f(x_k)\|$$

Vereinfachtes Newton-Verfahren:

- Jacobi-Matrix nur alle N Schritte neu berechnen
- nur noch lineare Konvergenz

Übersicht

Numerische Differentiation

Ziel:

- Approximation von Ableitungen mittels weniger Funktionswerte
- Herleitung über Taylor-Formeln oder mittels Interpolation
- finite Differenzen zur Bestimmung von $f'(x)$ und $f''(x)$
- Frage nach der Qualität der Näherungen

Definition 5.3

Die Vorwärtsdifferenz und die zentrale Differenz sind Näherungen an $f'(x)$ und lauten

$$D^+f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad D^0f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Satz 5.4 (Approximationsgüten)

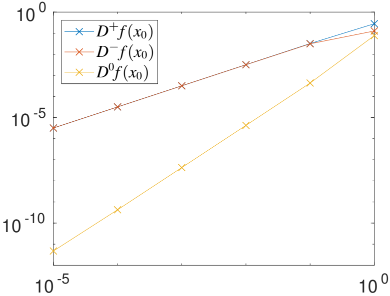
Es gelten

$$\left|f'(x) - D^+f(x)\right| = \mathcal{O}(h), \qquad \left|f'(x) - D^0f(x)\right| = \mathcal{O}(h^2).$$

Beispiel:

- Approximation von $f'(x_0)$ für $f(x) = \arctan(x)$ und $x_0 = 0.5$
- Approximationsgüte für verschiedene h

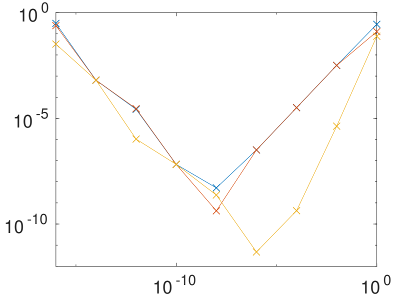
h	$\lvert D^+f(x_0) - f'(x_0)\rvert$	$\lvert D^-f(x_0) - f'(x_0)\rvert$	$\lvert D^0f(x_0) - f'(x_0)\rvert$
0.1	$3.2 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$
0.01	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$
10^{-5}	$3.2 \cdot 10^{-6}$	$3.2 \cdot 10^{-6}$	$4.8 \cdot 10^{-12}$.



Beispiel:

- Approximation von $f'(x_0)$ für $f(x) = \arctan(x)$ und $x_0 = 0.5$
- h kann nicht beliebig verkleinert werden, es entstehen Auslöschungseffekte

h	$\lvert D^+f(x_0) - f'(x_0)\rvert$	$\lvert D^-f(x_0) - f'(x_0)\rvert$	$\lvert D^0f(x_0) - f'(x_0)\rvert$
10^{-12}	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
10^{-14}	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$.



Definition 5.5

Die Näherung

$$D^2 f(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

an $f''(x)$ wird zentrale Differenz zweiter Ordnung genannt.

Der Fehler der zentralen Differenz zweiter Ordnung ist in $\mathcal{O}(h^2)$, also ist $D^2 f$ eine Approximationen zweiter Ordnung, d.h

$$f''(x) = D^2 f(x) + \mathcal{O}(h^2).$$

Gemischte partielle Ableitung höherer Ordnung

- bestimmen von etwa u_{xy} zu $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- für beliebige Wahlen h_x und h_y

$$u_{xy} \approx \frac{u(x+h_x, y+h_y) - u(x+h_x, y-h_y) - u(x-h_x, y+h_y) + u(x-h_x, y-h_y)}{2h_x \cdot 2h_y}$$

- für $h_x = h_y = h$

$$u_{xy} \approx \frac{u(x+h, y+h) - u(x+h, y-h) - u(x-h, y+h) + u(x-h, y-h)}{4h^2}$$

- zweite Differenz für $h_x = h_y = h$

$$u_{xx} \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2}$$

Übersicht

Black-Scholes Differentialgleichung

Problemhintergrund:

- Optionsgeschäft zu einer Aktie
- Preis einer Aktie sei $S : [0, T] \to \mathbb{R}_+$
- Option des Kaufs in der Zukunft (Zeitpunkt T) zu heute vereinbartem Preis E
- Aktie unterliegt Schwankungen mit Varianz $\sigma > 0$
- nebenher läuft risikoloser Zins mit Rate r

Wert der Kaufoption:

- abhängig von Zeit t und Aktienkurs $S(t)$

$$V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t, S) \mapsto V(t, S)$$

- offensichtlich gilt

$$V(t, S) = \max\big(S(t) - E, 0\big)$$

Black-Scholes Differentialgleichung

Aufgabe:

Wie ist E zu wählen? Oder anders gefragt, was ist diese Option wert?

Bemerkungen:

- vereinfachende Annahmen zu den Geschäften (feste Werte σ und r)
- Simulation des Aktienwertes mittels *Wiener Prozess* und *Itô's* Lemma

Definition 5.6

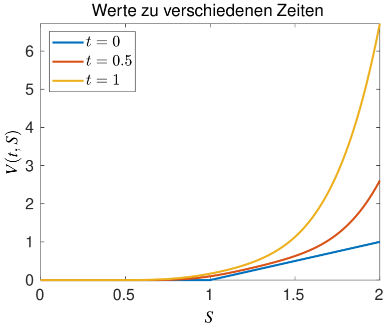
Die Black-Scholes-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung für $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zur Bewertung einer Option und besitzt die Form*

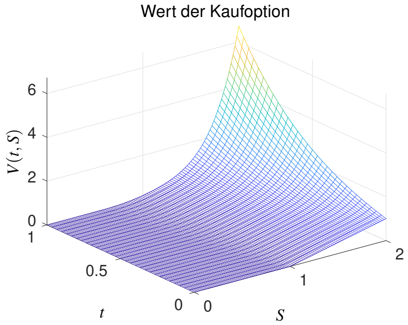
$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV.$$

F. Black, M. Scholes: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, J Polit Econ 81(3), 637–654, 1973.

Simulation:

- Approximation der Lösung auf einem Gitter
- Parameter $\sigma = 0.25$, $r = 0.04$, $t \in [0, 2]$





Literatur

- Dietz, H. D.: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Bd 2: Lineare Algebra und Optimierung*, Springer Spektrum, 2019.
- Larek, L.: *Lineare Systeme in der Wirtschaft*, Peter Lang intern. Verlag der Wissenschaften, Frankfurt a.M., 2009.
- Ohse, D.: *Lineare Wirtschaftsalgebra*, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, München, 2005.
- Opitz, O. / Klein, R.: *Mathematik: Lehrbuch für Ökonomen*, Wissenschaftsverlag, München, 2011.
- Sydsæter, K. / Hammond, P. / Strøm, A. / Carvajal, A.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftlicher. 2018, Pearson, Hallbergmoos.
- Terveer, I.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftlen. 2013, UVK Verlagsgesellschaft, Konstanz.