Übersicht

Funktionen:

- Abbildung zwischen zwei Mengen,
- einem Element der einen Menge (Definitionsbereich, DB) wird eindeutig ein Element der anderen Menge (Wertebereich, WB) zugeordnet,
- Elemente des Wertebereichs können garnicht, genau einmal oder mehrfach angenommen werden,
- Schreibweise

$$f : A \to B, \qquad f(a) = b.$$

Zunächst nur Funktionen abhängig von einer Variablen mit DB $I \subset \mathbb{R}$, also

$$f : I \to \mathbb{R}, \qquad y = f(x).$$

Einfache Beispiele:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1, \qquad I = \mathbb{R},$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}, \qquad I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\},$$

$$f(x) = \log(x), \qquad I = \mathbb{R}_+.$$

Definition 2.9

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, heißt auf $[a, b]$

- *monoton wachsend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$,*
- *monoton fallend, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$,.*

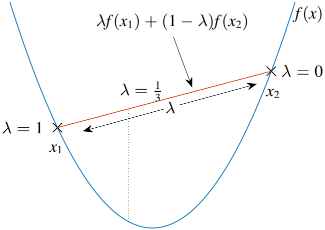
Gilt sogar „$<$“ anstatt „$\leq$“ bzw. „$>$“ anstatt „$\geq$“, so heißt f streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend.

Definition 2.10

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, heißt <u>konvex</u>, wenn jede ihrer Sekanten über dem Graphen von f liegt, d.h.

$$\forall \lambda \in (0,1),\ x_1, x_2 \in I \quad \textit{gilt} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Eine Funktion f heißt <u>konkav</u>, wenn $-f$ konvex ist.



Definition 2.10

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, heißt konvex, wenn jede ihrer Sekanten über dem Graphen von f liegt, d.h.

$$\forall \lambda \in (0,1),\ x_1, x_2 \in I \quad \textit{gilt} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Eine Funktion f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist.

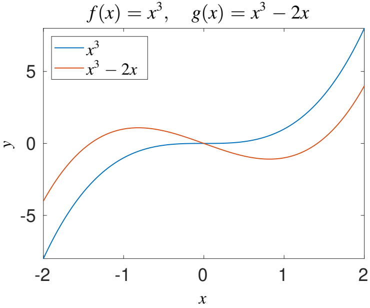
Konvexität von f:

- gibt an, in welche Richtung der Graph von f gekrümmt ist,
- konvex: Graph nach oben geöffnet, Anstieg wächst für steigendes x,
- konkav: Graph nach unten geöffnet, Anstieg wird kleiner für steigendes x.

Bezüge zur Differentialrechnung (f einmal/zweimal stetig differenzierbar):

$$
\begin{aligned}
f'(x) \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) \text{ ist monoton fallend,}\\
f'(x) \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) \text{ ist monoton wachsend,}\\
f''(x) \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) \text{ ist konkav,}\\
f''(x) \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) \text{ ist konvex.}
\end{aligned}
$$

Monotonie & Konvexität

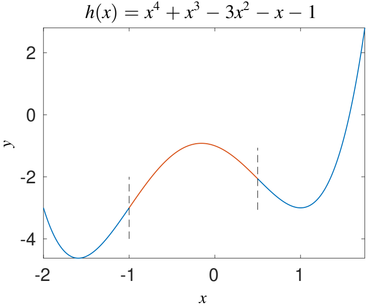


Monotonie:

- $f(x) = x^3$ (blaue Kurve) ist monoton wachsend,
- $g(x) = x^3 - 2x$ (rote Kurve) ist monoton wachsend auf $(-\infty, -\sqrt{2/3}]$ und $[\sqrt{2/3}, \infty)$ und monoton fallend auf $[-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}]$.

Konvexität:

- $f(x)$ ist konkav auf $(-\infty, 0)$ und konvex auf $(0, \infty)$,
- $g(x)$ ist konkav auf $(-\infty, 0)$ und konvex auf $(0, \infty)$.



Monotonie ($h(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 1$):

- monoton fallend für $(-\infty, -\frac{7+\sqrt{33})}{8})$ sowie $(-\frac{7-\sqrt{33})}{8}, 1)$,
- monoton wachsend für $(-\frac{7+\sqrt{33})}{8}, -\frac{7-\sqrt{33})}{8})$ sowie für $(1, \infty)$.

Konvexität:

- für $x \in (-\infty, -1)$ sowie $x \in (0.5, \infty)$ konvex und für $x \in (-1, 0.5)$ konkav.

Definition 2.11

Eine Funktion $f(x)$ *konvergiert an der Stelle* x_0 *gegen den* ***Grenzwert***

$$g = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass*

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Eine Funktion $f(x)$ *konvergiert für* $x \to \infty$ *gegen den* ***Grenzwert***

$$g = \lim_{x \to \infty} f(x),$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ *ein* x_ε *gibt, so dass*

$$x > x_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Nutze bekannte Grenzwerte einfacher Funktionen, um Grenzwerte zusammengesetzter Funktionen zu bestimmen (Bausteinprinzip).

Satz 2.12 (Grenzwertsätze)

Seien $u = \lim_{x\to a} f(x)$ *und* $v = \lim_{x\to a} g(x)$ *die Grenzwerte von* $f(x)$ *bzw.* $g(x)$ *für* $x \to a$*.*
Es gelten:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = u \pm v, \qquad \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = uv,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u}{v} \quad (\textit{für } g(x) \neq 0; v \neq 0), \qquad \lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)},$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n, \qquad \lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

Einfache Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-2)^2} = 0.25,$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \text{NaN, denn}$$

$$\lim_{x\to 2, x<2} \frac{1}{x-2} = -\infty \text{ und } \lim_{x\to 2, x>2} \frac{1}{x-2} = \infty.$$

Weitere einfache Beispiele:

$$\lim_{x \to 0, x \geq 0} \sqrt{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 7x}{4x^2 + 9} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{3 - 7/x}{4 + 9/x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - 7/x}{4 + 9/x^2} = \frac{3}{4},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x + 4}{x^2 - 2} = \frac{\lim_{x \to 0} x^3 - 2x + 4}{\lim_{x \to 0} x^2 - 2} = \frac{4}{-2} = -2.$$

Definition 2.13

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, *heißt* ***stetig an der Stelle*** x_0, $x_0 \in I$, *wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass*

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(Für Argumente x *nahe* x_0 *liegen auch die Funktionswerte* $f(x)$ *nahe an* $f(x_0)$*.)*

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, *heißt* ***stetig***, *wenn sie für alle* $x \in I$ *stetig ist.*

Alternative zum ε-δ-Kriterium mittels Grenzwerte:

- eine Funktion $f(x)$ ist genau dann stetig in x_0, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

- eine Funktion $f(x)$ ist genau dann stetig auf I, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Definition 2.13

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, heißt <u>stetig an der Stelle x_0</u>, $x_0 \in I$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(Für Argumente x nahe x_0 liegen auch die Funktionswerte $f(x)$ nahe an $f(x_0)$.)

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, heißt <u>stetig</u>, wenn sie für alle $x \in I$ stetig ist.

<u>Alternative zum ε-δ-Kriterium mittels Grenzwerte</u>:

- eine Funktion $f(x)$ ist genau dann stetig in x_0, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

- eine Funktion $f(x)$ ist genau dann stetig auf I, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{für alle } x \in I.$$

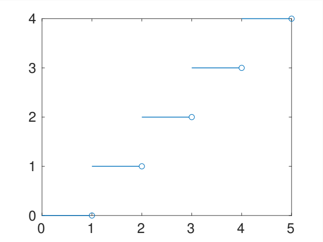
Beispiel 11

Die Funktion $f(x) = \lfloor x \rfloor$ *definiert das Abrunden von* x *etwa sind*

$$f(0.5) = 0,\ f(0.9) = 0,\ f(1.7) = 1,\ f(-3.1) = -4,\ f(1) = 1, \ldots .$$

Offensichtlich ist f *etwa in den Punkten* $x = 1.5$, $x = 1.7$, $x = 1.99$, $x = 3.2$ *usw. stetig. Aber* f *ist in allen* $z \in \mathbb{Z}$ *nicht stetig, denn beispielsweise ist* $\lim_{x \to z} f(x)$ *nicht definiert, weil in einer Umgebung (*$|\alpha| < 1$*) um* $z \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$f(z+\alpha) = \begin{cases} z & \text{für } \alpha > 0, \\ z-1 & \text{für } \alpha < 0. \end{cases}$$



Für $x \in \mathbb{Z}$ *liegen jeweils Sprünge vor und es gibt keine Grenzwerte.*

Sind $f(x)$ und $g(x)$ stetig, so sind es auch

$$
\begin{aligned}
h(x) &= f(x) \cdot g(x), \\
h(x) &= f(x) \pm g(x), \\
h(x) &= f(x)/g(x) \qquad \text{(für } g(x) \neq 0\text{)}
\end{aligned}
$$

Sprungstelle in x_0:

- beide einseitigen Grenzwerte (von links, $x < x_0$, und von rechts, $x > x_0$) existieren, sind aber verschieden,
- klassisches Beispiel ist $f(x) = 1/x$ bei $x_0 = 0$, denn

$$\lim_{x \to 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0, x > 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Übersicht

Differentialrechnung:

- Grundlage für Analyse von Funktionen in Bezug auf ihre Extrema,
- Definition der Ableitung formal mittels Grenzwerte,
- Bestimmung von Anstiegen von Funktionen.

Idee der ersten Ableitung von $f(x)$:

- Anstieg von $f(x)$ in x,
- Tangente t durch $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ gelegt und Grenzwert des Anstiegs von t für $h \to 0$ bestimmen.

Definition 2.14

Zu einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, *ist die erste Ableitung an der Stelle* x *definiert als*

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Weiter heißt $f(x)$ *differenzierbar, wenn* $f(x)$ *in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist, d.h. ihre Ableitung existiert.*

Die Ableitung von $f'(x)$ *heißt zweite Ableitung von* $f(x)$*. Allgemein gilt die Rekursion*

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Beispiel 12

Die erste Ableitung von $f(x) = x^2$ *ist*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x + h \\ &= 2x.\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

- ist $f(x)$ in x differenzierbar, so muss $f(x)$ in x stetig sein,
- anderherum (Logik): wenn $f(x)$ in x_0 unstetig ist, kann $f(x)$ in x_0 nicht differenzierbar sein,
- Bedingung ist nicht hinreichend, siehe $f(x) = |x|$ bei $x = 0$.

Formale Berechnung am Beispiel der Standardfunktion x^n:

- Grenzwert
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h},$$
- binomische Formel
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a^n + na^{n-1}b + \binom{n-2}{2} a^n b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n,$$
- Umformungen ergeben
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}\right) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots + h^{n-1}x + h^n\right) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \cdots + h^{n-2}x + h^{n-1} \right) \\ &= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 \end{aligned}$$
- bekannte Formel $\quad (x^n)' = nx^{n-1}.$

Ableitungen von Standardfunktionen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^n, & f'(x) &= nx^{n-1},\\
f(x) &= \mathrm{e}^{ax}, & f'(x) &= a\cdot \mathrm{e}^{ax},\\
f(x) &= \ln(x), & f'(x) &= \frac{1}{x},\\
f(x) &= \sin(x), & f'(x) &= \cos(x),\\
f(x) &= \cos(x), & f'(x) &= -\sin(x).
\end{aligned}
$$

Einfache Folgerungen:

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -nx^{-n-1}$$
$$= -\frac{n}{x^{n+1}}$$

sowie

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$
$$= \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}}$$
$$= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Bestimmung von Ableitungen mittels Rückführung auf Kombinationen bekannter Ableitungen (Bausteinprinzip).

Satz 2.15

Für zusammengesetzte Funktionen gelten folgen Differentiationsregeln:

Summe:	$(f+g)'$	$=$	$f'+g'$	
Differenz:	$(f-g)'$	$=$	$f'-g'$	
Produkt:	$(fg)'$	$=$	$f'g+fg'$	
Quotient:	$(f/g)'$	$=$	$(f'g-fg')/g^2$	*(für* $g \neq 0$*)*
Verkettung:	$(f(g))'$	$=$	$f'(g)g'$	
Inverse:	$(f^{-1})'$	$=$	$1/f'$	

Beispiele zur Anwendung der Produktregel:

- Für $f(x) = x^2 \sin(x)$ ergibt sich

$$\Big(\underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}\Big)' = \underbrace{(x^2)'}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} + \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\big(\sin(x)\big)'}_{v'}$$
$$= 2x\sin(x) + x^2\cos(x).$$

- Für $f(x) = \sqrt{ax}\ln(x)$ ergibt sich

$$\Big(\underbrace{\sqrt{ax}}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v}\Big)' = \underbrace{(\sqrt{ax})'}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} + \underbrace{\sqrt{x}}_{u} \cdot \underbrace{\big(\ln(x)\big)'}_{v'}$$
$$= a \cdot \frac{1}{2}(ax)^{-\frac{1}{2}}\ln(x) + \sqrt{ax}\frac{1}{x}$$
$$= \frac{a\ln(x)}{2\sqrt{ax}} + \frac{\sqrt{ax}}{x}.$$

Beispiele zur Anwendung der Kettenregel:

- Für $f(x) = (\cos(x))^3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f &= x^3, \quad f' = 3x^2, \\ g &= \cos(x), \quad g' = -\sin(x), \\ \Rightarrow \quad \left((\cos(x))^3\right)' &= \underbrace{3(\cos(x))^2}_{f'(g)} \cdot \underbrace{(-\sin(x))}_{g'} \\ &= -3(\cos(x))^2 \sin(x). \end{aligned}$$

- Für $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f &= \ln(x), \quad f' = \frac{1}{x}, \\ g &= x^2 + 2x - 3, \quad g' = 2x + 2, \\ \Rightarrow \quad \left(\ln(x^2 + 2x - 3)\right)' &= \underbrace{\frac{1}{x^2 + 2x - 3}}_{f'(g)} \cdot \underbrace{(2x + 2)}_{g'} \\ &= \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 3}. \end{aligned}$$

Spezialtrick logarithmische Differentiation:

- Was ist zu tun bei
$$h(x) = x^x?$$
- Umformung
$$x^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln(x)} \quad \left(= \left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^x = x^x \right)$$
- nun Differentiation (Ketten- und Produktregel) möglich
$$h' = (1 \cdot \ln x + x \cdot 1/x)\mathrm{e}^{x \cdot \ln(x)} = (\ln(x) + 1)x^x.$$

Allgemeines Vorgehen bei logarithmischer Differentiation:

- Ableiten der Funktion
$$h(x) = \big(f(x)\big)^{g(x)},$$
- Umformung
$$h(x) = f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\cdot \ln f(x)} \left(= \left(\mathrm{e}^{\ln f(x)}\right)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} \right),$$
- Ketten- und Produktregel führen auf
$$\big(f(x)^{g(x)}\big)' = f(x)^{g(x)} (g'(x) \ln f(x) + g(x) f'(x)/f(x)).$$

Elastizität

Idee der Elastizität:

- Ableitung f' gibt Anstieg von f in absoluter Form an, für wirtschaftliche Analysen sind aber häufig relative Änderungen entscheidend,
- Elastizität $\eta(x)$ entspricht relativer Änderung einer Angebots- bzw. Nachfragefunktion $f(x)$ zur Preisänderung (Preis x),
- $|\eta(x)|$ um so höher, je stärker Angebots- bzw. Nachfragefunktion auf Preisänderungen reagiert.

Formale Definition:

- Grenzwert des Quotienten der relativen Änderungen von $f(x)$ und x

$$\eta(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}}{\frac{h}{x}}.$$

Einfache Umformung ergibt:

$$\eta(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \frac{x}{f(x)} = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Definition 2.16

Für $f(x) \neq 0$ heißt

$$\eta(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

<u>Elastizität</u> von $f(x)$.

Weiter heißt $f(x)$ <u>preiselastisch</u>, falls $|\eta(x)| > 1$, und <u>preisunelastisch</u>, falls $|\eta(x)| < 1$.

Beispiel 13

Für die Funktion $N(p) = 7 - \sqrt{p}$ *mit* $p \in (0, 49)$ *ist*

$$\eta(p) = p \cdot \frac{N'(p)}{N(p)} = p \cdot \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}}{7 - \sqrt{p}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{p}}{7 - \sqrt{p}}.$$

Wird untersucht, für welche $p \in (0, 49)$ *die Nachfragefunktion* $N(p)$ *preiselastisch ist, so führt dies auf*

$$\begin{aligned}
|\eta(p)| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{p}}{7 - \sqrt{p}} > 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{p}}{7 - \sqrt{p}} > 2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{p} > \frac{14}{3} \\
&\Leftrightarrow p > \frac{14^2}{9} \approx 21.78.
\end{aligned}$$

Somit ist $N(p)$ *für* $p \in (21.78, 49)$ *preiselastisch.*

Beispiel 14

Die Nachfragefunktion $a = f(p) = p^2 - 7p + 10$ *mit* $(0 \leq p \leq 2)$ *hat die Elastizität*

$$\eta(p) = p \cdot \frac{2p - 7}{p^2 - 7p + 10} = \frac{2p^2 - 7p}{p^2 - 7p + 10}.$$

Wegen $\eta(p) < 0$ *für* $p \in (0, 2)$ *betrachten wir*

$$\begin{aligned} -(2p^2 - 7p) &> p^2 - 7p + 10 \\ 0 &> 3p^2 - 14p + 10 \\ p_{1,2} &= \frac{7}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3} \qquad p_1 \approx 0.88,\ p_2 \approx 3.79. \end{aligned}$$

Nun gilt $|\eta(p_1)| = 1$ *und ein einfacher Test (für* $p = 0.9$ *ist* $|\eta(p_1)| = 1.04$*) führt darauf, dass* $f(p)$ *für* $p \in (0.88, 2)$ *preiselastisch ist.*

Lösen der Gleichungen (zu den Ungleichungen) zum Beispiel auch mit numerischen Methoden wie dem Newton-Verfahren möglich.

Bestimmung von Grenzwerten mittels Quotientenregel kann zu Situationen „$0/0$“ oder „∞/∞“ führen. Ausweg:

Satz 2.17 (Regel von l'Hospital)

Seien $a \in \mathbb{R}$ *oder* $a \in \{-\infty, \infty\}$ *sowie* $u = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *und* $v = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. *Ist* $u = v = 0$ *oder ist* $u = v = \pm\infty$, *sind* f *und* g *differenzierbar und existiert der Grenzwert*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

so gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel 15

Einfache Anwendungen der Regel von l'Hospital sind

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Für folgenden Grenzwert wird die Regel von l'Hospital n-fach angewendet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Definition 2.18

Für eine hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ heißt

$$T(f,x_0,n)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

das Taylorpolynom n-ten Grades zur Entwicklungsstelle x_0.

Bemerkung:

- Taylorpolynome erweisen sich für Funktionen, die hinreichend viele stetige Ableitungen besitzen, oft als nützliche Approximationen (meist $n = 1$ oder $n = 2$).

Beispiel:

- Entwicklung von $f(x) = \mathrm{e}^x$ in $x_0 = 0$,

$$T(f,0,1)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + 1 \cdot (x - 0) = 1 + x,$$

$$T(f,0,2)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) = 1 + x + x^2/2,$$

$$T(f,0,3)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6.$$

Beispiel:

- Entwicklung von $f(x) = \mathrm{e}^x$ in $x_0 = 0$,

$$T(f,0,1)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + 1 \cdot (x - 0) = 1 + x,$$

$$T(f,0,2)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) = 1 + x + x^2/2,$$

$$T(f,0,3)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6.$$

Beispiel:

- Entwicklung von $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$,

$$T(f,0,1)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + 1 \cdot (x - 0) = 1 + x,$$

$$T(f,0,2)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) = 1 + x + x^2/2,$$

$$T(f,0,3)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6.$$

Beispiel:

- Entwicklung von $f(x) = \mathrm{e}^x$ in $x_0 = 0$,

$$T(f,0,1)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + 1 \cdot (x - 0) = 1 + x,$$

$$T(f,0,2)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) = 1 + x + x^2/2,$$

$$T(f,0,3)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6.$$

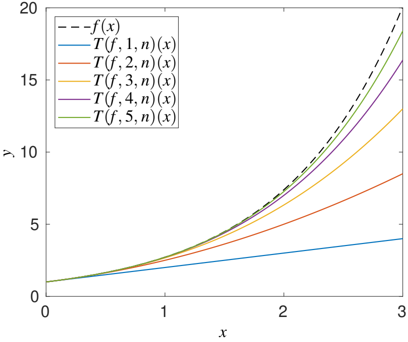
Beispiel:

- Entwicklung von $f(x) = \mathrm{e}^x$ in $x_0 = 0$,

$$T(f,0,1)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + 1 \cdot (x - 0) = 1 + x,$$

$$T(f,0,2)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) = 1 + x + x^2/2,$$

$$T(f,0,3)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6.$$



Restglied (Fehler):

- Differenz zwischen $f(x)$ und der Näherung $T(f, x_0, n)(x)$

$$R(f, x_0, n)(x) = f(x) - T(f, x_0, n)(x),$$

- dabei gilt die Abschätzung

$$|f(x) - T(f, x_0, n)(x)| \leq \max_{z \in (x_0, x)} \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Übersicht

Definition 2.19 (Formale Definition)

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, hat an der Stelle x_0 eine lokale Maximalstelle bzw. eine lokale Minimalstelle, wenn es ein $h > 0$ gibt, so dass die Einschränkung $f_{|(x_0-h,x_0+h)}$ von $f(x)$ auf das Intervall $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ bei x_0 ein Maximum bzw. ein Minimum hat.

Weiter hat f an der Stelle x_0 ein (globales) Maximum bzw. Minimum, falls für alle $x \in I$ gilt $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0) \leq f(x)$.

Extrempunkt:

- besteht aus Extremstelle (x-Wert) und Extremwert (y-Wert)

$$\text{Extrempunkt} = (\text{Extremstelle},\ \text{Extremwert}).$$

Interpretation:

- soll f in x_E maximal sein, so muss $f(x)$ für $x < x_E$ monoton steigend und für $x > x_E$ monoton fallend sein (für ein Minimum andersherum),
- folglich ist $f'(x)$ für $x < x_E$ negativ und für $x > x_E$ positiv (oder andersherum),
- insbesondere muss aber $f'(x_E) = 0$ gelten.

Satz 2.20 (Notwendige Bedingung)

Hat die Funktion $f(x)$ in x_0 ein lokales Extremum und ist dort differenzierbar, so gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Definition 2.21

Alle x mit $f'(x) = 0$ werden kritische Stellen genannt. Ist eine kritische Stelle keine Extremalstelle, so wird der dazugehörige Punkte Sattelpunkt genannt.

Extremwertbestimmung

Feststellung/Charakterisierung eines Extremums:

- mittels zweiter Ableitung $f''(x)$,
- hat $f(x)$ in x_E ein Minimum, so ist $f(x)$ um x_E konvex, also $f''(x_E) > 0$,
- hat $f(x)$ in x_E ein Maximum, so ist $f(x)$ um x_E konkav, also $f''(x_E) < 0$.

Satz 2.22 (Hinreichende Bedingung)

Gilt neben der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ zudem $f'' > 0$ (bzw. $f'' < 0$), so handelt es sich um ein Minimum (Maximum).

Bemerkungen:

- $f'(x_E) = 0$ zusammen mit $f''(x_E) \neq 0$ ist hinreichend aber nicht notwendig,
- sind $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) = 0$, so untersuche weitere Ableitungen,
- gerade Ableitung als erstes von null verschieden $\Rightarrow$ Extremalstelle,
- ungerade Ableitung als erstes von null verschieden$\Rightarrow$ keine Extremalstelle,
- auch hier entscheidet das Vorzeichen über die Art des Extremums.

Extremwertbestimmung

Vorgehensweise bei differenzierbarer Funktion $f(x)$:

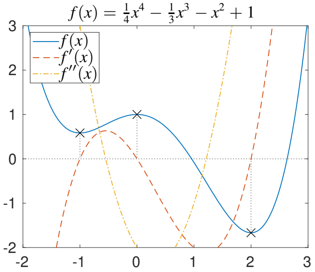
1. Löse $f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad$ Lösungsmenge M aller kritischen (extremstellenverdächtigen) Punkte.
2. Auswertung von $f''(x)$ für alle kritischen Punkte:
   Ist $f''(x_E) > 0$, so liegt ein Minimum vor,
   ist $f''(x_E) < 0$, so handelt es sich um ein Maximum.
   Gilt $f''(x_E) = 0$, so sind höhere Ableitungen zu untersuchen
3. In der Regel Bestimmung der Funktionswerte $f(x_E)$.

Zudem auf Extremalität zu analysierende Stellen:

- Randpunkte sowie
- alle x, in denen f' nicht existiert.

Extrema von $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$:

- Ableitungen $f'(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $f''(x) = 3x^2 - 2x - 2$,
- kritische Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$,
- Tests $f''(x_1) = -2 < 0$, $f''(x_2) = 6 > 0$, $f''(x_3) = 3 > 0$,
  $\rightarrow$ Maximum in $(0, 1)$, Minima in $(-1, 7/12)$ sowie $(2, -5/3)$,
- wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ist $(2, -5/3)$ ein globales Minimum.



Beispiel zu Extrema

Beispiel 16

Olaf und Angela möchten einen neuen Steuersatz t (in %) festlegen. Der Umsatz verhält sich, abhängig von t, wie

$$u = u(t) = (t-120)^2(100-t) = -t^3 + 340t^2 - 38400t + 1440000$$

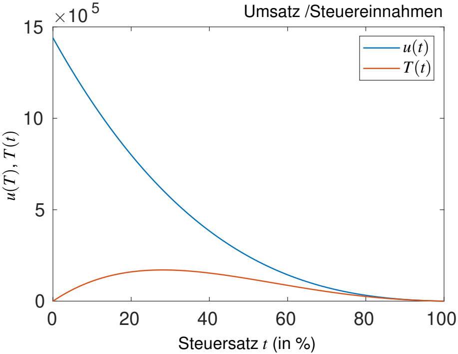
Der Finanzminister sucht das Maximum seiner Einnahmen

$$T = T(t) = 0.01t \cdot u = -0.01t^4 + 3.4t^3 - 384t^2 + 14400t$$

für $t \in [0, 100]$.

Beispiel zu Extrema

<u>Graphische Darstellung</u>:



Beispiel zu Extrema

Notwendige Bedingungen:

- kritische Stellen sind die Intervallenden und alle Nullstellen von

$$T'(t) = -0.04t^3 + 10.20t^2 - 768t + 14400 = (120 - t)(t^2 - 135t + 3000)/25,$$

- die Nullstellen von $T'(t)$ sind $t_1 = 28.0506$, $t_2 = 106.949$ und $t_3 = 120$,
- nur t_1 liegt im sinnvollen Intervall,
- der Funktionswert an den Rändern ist Null – also nicht maximal,
- bleibt nur $t_1 \approx 28$ als Kanditat.

Hinreichende Bedingung:

- zweite Ableitung

$$T''(t) = -0.12(t^2 - 170 \cdot t + 6400)$$

  hat an der Stelle t_1 den Wert -290.188,
- somit liegt tatsächlich ein Maximum vor,
- t_1 ist globales Maximum, da keine weiteren kritischen Stellen in Frage kommen.

Notwendige Bedingungen:

- kritische Stellen sind die Intervallenden und alle Nullstellen von

$$T'(t) = -0.04t^3 + 10.20t^2 - 768t + 14400 = (120 - t)(t^2 - 135t + 3000)/25,$$

- die Nullstellen von $T'(t)$ sind $t_1 = 28.0506$, $t_2 = 106.949$ und $t_3 = 120$,
- nur t_1 liegt im sinnvollen Intervall,
- der Funktionswert an den Rändern ist Null – also nicht maximal,
- bleibt nur $t_1 \approx 28$ als Kanditat.

Hinreichende Bedingung:

- zweite Ableitung

$$T''(t) = -0.12(t^2 - 170 \cdot t + 6400)$$

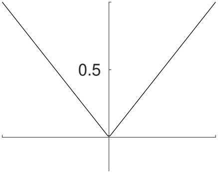
  hat an der Stelle t_1 den Wert -290.188,
- somit liegt tatsächlich ein Maximum vor,
- t_1 ist globales Maximum, da keine weiteren kritischen Stellen in Frage kommen.

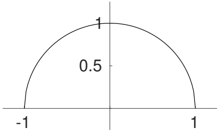
Sonderfälle:

1. $f(x) = |x|$ hat in $x_E = 0$ ein Minimum, jedoch existiert $f'(0)$ nicht.
2. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ mit dem DB$= [-1,\ 1]$ besitzt die erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Einzige Nullstelle $x_1 = 0$ führt auf globales Maximum. Weiter sind aber auch die Intervallgrenzen $x_2 = -1$ und $x_3 = 1$ Extremalstellen ($f(x)$ wird jeweils minimal).





Erinnerung:

- auch Intervallgrenzen und Stellen, an denen $f'(x)$ nicht existiert, untersuchen, s. Folie 120.

Wendepunkte

Definition 2.23

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, hat den Wendepunkt $(x_0, f(x_0))$, wenn f auf einer Seite von x_0 konvex und auf der anderen konkav ist.

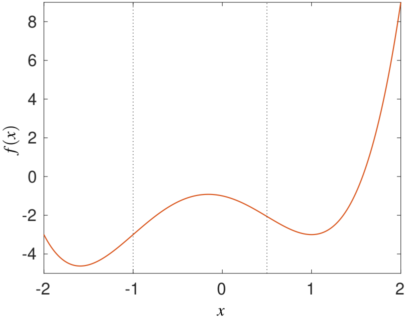
Berechnung von Wendestellen/Wendepunkten:

- Lösung der Gleichung $f''(x) = 0$ führt auf mögliche Wendestellen (notwendige Bedingung),
- ist $f'''(x_0) \neq 0$, so handelt es sich tatsächlich um eine Wendestelle (hinreichende Bedingung).

Wendepunkte

$\underline{f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 1}$:

- $f''(x) = 12x^2 + 6x - 6$,
- $f''(x) = 0$ führt auf $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$,
- Wendestellen sind $x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$.



Übersicht

Problemstellung:

- gesucht ist eine Lösung x^* von $f(x) = 0$,
- gegeben ist ein Näherungswert x_0 für x^* (initial guess),
- Iteration (rekursive Folge $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$,
- Iterationsvorschrift definiert das jeweilige Verfahren.

Problemstellung:

- gesucht ist eine Lösung x^* von $f(x) = 0$,
- gegeben ist ein Näherungswert x_0 für x^* (initial guess),
- Iteration (rekursive Folge $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$,
- Iterationsvorschrift definiert das jeweilige Verfahren.

Methode I: Bisektionsverfahren:

- Einschachteln der Nullstelle,
- Startintervall $[a,b]$ mit $f(a) > 0, f(b) < 0$, (bzw. $f(a) < 0, f(b) > 0$)
- Berechnung von $c = (a+b)/2$ und $f(c)$,
- gilt $f(c) < 0 \quad \rightarrow$ neues Intervall $[a,c]$, (bzw. $[c,b]$)
  gilt $f(c) > 0 \quad \rightarrow$ neues Intervall $[c,b]$, (bzw. $[a,c]$)
- solange fortführen, bis ausreichende Genauigkeit $|a-b|$ erreicht.

Problemstellung:

- gesucht ist eine Lösung x^* von $f(x) = 0$,
- gegeben ist ein Näherungswert x_0 für x^* (initial guess),
- Iteration (rekursive Folge $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$,
- Iterationsvorschrift definiert das jeweilige Verfahren.

Methode II: Fixpunktform:

- Umformen der Gleichung in die Form $x = \varphi(x)$,
- unter gewissen Bedingungen konvergiert die Folge

$$x_i = \varphi(x_{i-1}) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

  gegen x^*,
- Analyse der Konvergenz gegen x^* mittels Banachschem Fixpunktsatz.

Problemstellung:

- gesucht ist eine Lösung x^* von $f(x) = 0$,
- gegeben ist ein Näherungswert x_0 für x^* (initial guess),
- Iteration (rekursive Folge $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$,
- Iterationsvorschrift definiert das jeweilige Verfahren.

Methode II: Fixpunktform:

- Banach'scher Fixpunktsatz:

  Iteration konvergiert gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sowie ein $C < 1$ mit $\varphi(I) \subset I$ gibt, sodass

  $$|\varphi(y) - \varphi(z)| < C|y - z| \qquad \forall y, z \in I, \qquad \text{(Kontraktion)}$$
- es gilt dann $x^* = \varphi(x^*)$.

Problemstellung:

- gesucht ist eine Lösung x^* von $f(x) = 0$,
- gegeben ist ein Näherungswert x_0 für x^* (initial guess),
- Iteration (rekursive Folge $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$,
- Iterationsvorschrift definiert das jeweilige Verfahren.

Methode III: Newton-Verfahren:

- Startnäherung x_0,
- Iteration

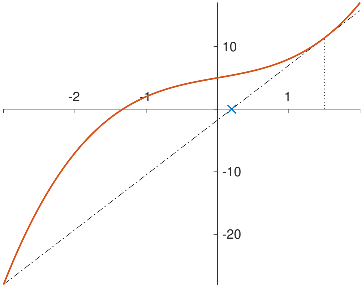
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},$$

- konvergiert oft sehr schnell, benötigt aber in der Regel gute Startwerte,
- Schrittweitensteuerung erweist sich mitunter als sinnvoll.

<u>Newton-Verfahren – Idee</u>:

- Tangente an $f(x)$ im aktuellen Punkt legen,
- Nullstelle der Tangente ist neue Iterierte
  $\rightarrow$ Folge $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ von Näherungen an x^*.

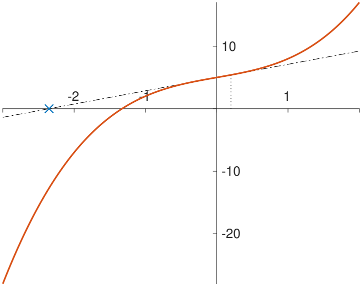
Newton-Iteration (1. Schritt, $x_0 = 1.5 \rightarrow x_1 = 0.2$)



Newton-Verfahren – Idee:

- Tangente an $f(x)$ im aktuellen Punkt legen,
- Nullstelle der Tangente ist neue Iterierte
  $\rightarrow$ Folge $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ von Näherungen an x^*.

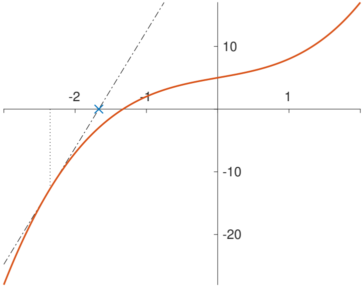
Newton-Iteration (2. Schritt, $x_1 = 0.2 \rightarrow x_2 = -2.35$)



Newton-Verfahren – Idee:

- Tangente an $f(x)$ im aktuellen Punkt legen,
- Nullstelle der Tangente ist neue Iterierte
  $\rightarrow$ Folge $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ von Näherungen an x^*.

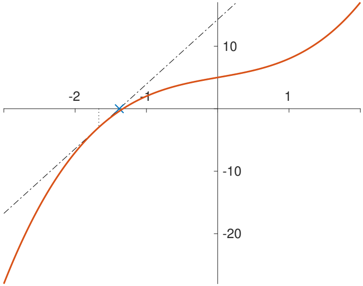
Newton-Iteration (3. Schritt, $x_2 = -2.35 \rightarrow x_3 = -1.67$)



Newton-Verfahren – Idee:

- Tangente an $f(x)$ im aktuellen Punkt legen,
- Nullstelle der Tangente ist neue Iterierte
  $\rightarrow$ Folge $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ von Näherungen an x^*.

Newton-Iteration (4. Schritt, $x_3 = -1.67 \rightarrow x_4 = -1.38$)



Newton-Verfahren – Herleitung eines Iterationsschrittes:

- aktuelle Iterierte x_i,
- Tangente $t(x) = mx + n$ an $f(x)$ hat den Anstieg $m = f'(x_i)$,
- Tangente soll durch $(x_i, f(x_i))$ gehen, also

$$t(x_i) = mx_i + n = f(x_i) \quad \Rightarrow \quad n = f(x_i) - mx_i,$$

- Nullstelle von $t(x)$ ist neue Iterierte x_{i+1}, also

$$t(x_{i+1}) = mx_{i+1} + n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = -\frac{n}{m},$$

- Einsetzen von m und n

$$x_{i+1} = -\frac{f(x_i) - mx_i}{m} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Newton-Verfahren – Iterationsvorschrift zu Startwert x_0:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Bemerkungen:

- quadratische Konvergenz, d.h.

$$|x^* - x_{i+1}| \leq C|x^* - x_i|^2$$

  mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$,
  Daumenregel: Anzahl richtiger Nachkommastellen verdoppelt sich pro Iteration,
- gute Startwerte sind nötig,
- Schrittweitensteuerung mitunter sinnvoll, verkürzte bzw. zu lange Schritte.

Beispiel 17

Jemand lebt hemmungslos auf Kredit:

K_0	=	*0*	*- Anfangskapital*
E	=	*-3000*	*- monatliche Einzahlung*
n	=	*120*	*- Anzahl der Monate*
K_n	=	*-600000*	*- Endkapital*

Welcher Zinssatz liegt zu Grunde?

Lösung:

- Zinsenszinsformel

$$K_n = K_0(1+p)^n + E\frac{(1+p)^n - 1}{p},$$

- Nullstellenform, nichtlineare Gleichung

$$f(p) = K_n - K_0(1+p)^n - E\frac{(1+p)^n - 1}{p} = 0,$$

- Fixpunktform

$$p^{(i+1)} = \varphi(p^{(i)}) = \left(\frac{p^{(i)}K_n + E}{p^{(i)}K_0 + E}\right)^{1/n} - 1.$$

Numerische Ergebnisse:

- Einschachtelung mittels Bisektionsverfahren zum Startintervall $p \in [0.006,\ 0.01]$

i	a (in %)	b (in %)
1	0.6	1.0
2	0.6	0.8
3	0.7	0.8
4	0.75	0.8
5	0.775	0.8
6	0.7875	0.8
7	0.7938	0.8
8	0.7969	0.8
9	0.7969	0.7984
10	0.7977	0.7984

Numerische Ergebnisse:

- Fixpunktiteration

$$p^{(i+1)} = \left(\frac{p^{(i)} K_n + E}{p^{(i)} K_0 + E} \right)^{1/n} - 1, \qquad \text{zu} \qquad p^{(0)} = 0.5\%$$

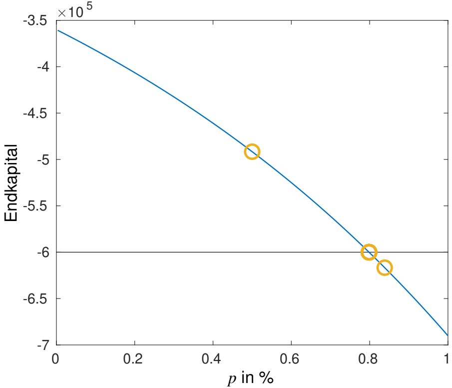
i	$p^{(i)}$ (in %)
0	0.5
1	0.5793
2	0.6433
3	0.6916
4	0.7263
5	0.7504
6	0.7668
7	0.7777

Numerische Ergebnisse:

- Newton-Verfahren mit $p_0 = 0.5\%$

i	p_i (in %)
0	0.5
1	0.838448863019865
2	$\underline{0.79}9076425304361$
3	$\underline{0.798410}504163284$
4	$\underline{0.79841031810329}8$

Numerische Ergebnisse:



Aufgabe 20160803A2.
Löse $A(p) = N(p)$ mit der Angebotsfunktion $A(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p)$ und der Nachfragefunktion $N(p) = 12 - 2p$

a) durch Bisektion (Einschachteln bis $|A(p) - N(p)| \leq 0.1$),

b) mittels Fixpunktiteration (3 Schritte),

c) mit dem Newton-Verfahren (1 Schritt).

Zu lösen ist:

$$0.3p + \ln(10 + 3p) = 12 - 2p \quad \Rightarrow \quad f(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p) - 12 + 2p = 0.$$

Alte Klausuraufgabe

Aufgabe 20160803A2.
Löse $A(p) = N(p)$ mit der Angebotsfunktion $A(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p)$ und der Nachfragefunktion $N(p) = 12 - 2p$

a) durch Bisektion (Einschachteln bis $|A(p) - N(p)| \leq 0.1$),

b) mittels Fixpunktiteration (3 Schritte),

c) mit dem Newton-Verfahren (1 Schritt).

Zu lösen ist:

$$0.3p + \ln(10 + 3p) = 12 - 2p \quad \Rightarrow \quad f(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p) - 12 + 2p = 0.$$

Aufgabe 20160803A2.
Löse $A(p) = N(p)$ mit der Angebotsfunktion $A(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p)$ und der Nachfragefunktion $N(p) = 12 - 2p$

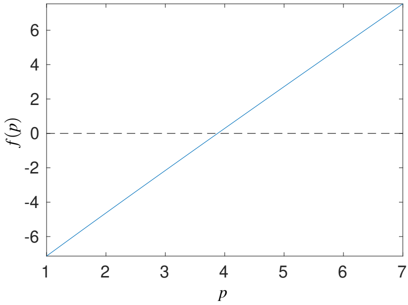
a) durch Bisektion (Einschachteln bis $|A(p) - N(p)| \leq 0.1$),

b) mittels Fixpunktiteration (3 Schritte),

c) mit dem Newton-Verfahren (1 Schritt).

Zu lösen ist:

$$0.3p + \ln(10 + 3p) = 12 - 2p \quad \Rightarrow \quad f(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p) - 12 + 2p = 0.$$



Aufgabe 20160803A2.
Löse $A(p) = N(p)$ mit der Angebotsfunktion $A(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p)$ und der Nachfragefunktion $N(p) = 12 - 2p$

a) durch Bisektion (Einschachteln bis $|A(p) - N(p)| \leq 0.1$),

b) mittels Fixpunktiteration (3 Schritte),

c) mit dem Newton-Verfahren (1 Schritt).

Zu lösen ist:

$$0.3p + \ln(10 + 3p) = 12 - 2p \quad \Rightarrow \quad f(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p) - 12 + 2p = 0.$$

Lösung für a):

- Startintervall $[a, b]$ mit $a = 3.5$, $b = 4.5$ und $f(a) = -0.9$, $f(b) = 1.5$,
- Iteration

$$\begin{aligned} c = 4,\ f(c) = 0.29 \quad &\rightarrow \quad [3.5,\ 4] \\ c = 3.75,\ f(c) = -0.32 \quad &\rightarrow \quad [3.75,\ 4] \\ c = 3.875,\ f(c) = -0.014 & \end{aligned}$$

- ausreichende Genauigkeit, da $|f(3.875)| < 0.1, \quad x^* \approx 3.875.$

Aufgabe 20160803A2.

Löse $A(p) = N(p)$ mit der Angebotsfunktion $A(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p)$ und der Nachfragefunktion $N(p) = 12 - 2p$

a) durch Bisektion (Einschachteln bis $|A(p) - N(p)| \leq 0.1$),

b) mittels Fixpunktiteration (3 Schritte),

c) mit dem Newton-Verfahren (1 Schritt).

Zu lösen ist:

$$0.3p + \ln(10 + 3p) = 12 - 2p \quad \Rightarrow \quad f(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p) - 12 + 2p = 0.$$

Lösung für b):

- Iterationsvorschrift herleiten

$$0.3p + \ln(10 + 3p) = 12 - 2p \quad \Rightarrow \quad 2.3p = 12 - \ln(10 + 3p)$$

$$p_{i+1} = \varphi(p_i) = \frac{1}{2.3}\big(12 - \ln(10 + 3p_i)\big),$$

- Iteration

$$p_1 = 4, \quad p_2 = \varphi(p_1) = 3.8735, \quad p_3 = 3.8810, \quad p_4 = 3.8806.$$

Aufgabe 20160803A2.
Löse $A(p) = N(p)$ mit der Angebotsfunktion $A(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p)$ und der Nachfragefunktion $N(p) = 12 - 2p$

a) durch Bisektion (Einschachteln bis $|A(p) - N(p)| \leq 0.1$),

b) mittels Fixpunktiteration (3 Schritte),

c) mit dem Newton-Verfahren (1 Schritt).

Zu lösen ist:

$$0.3p + \ln(10 + 3p) = 12 - 2p \quad \Rightarrow \quad f(p) = 0.3p + \ln(10 + 3p) - 12 + 2p = 0.$$

Lösung für c):

- Ableitung

$$f'(p) = 0.3 + \frac{3}{10 + 3p} + 2 = 2.3 + \frac{3}{10 + 3p}$$

- Iteration

$$p_{i+1} = p_i - \frac{f(p_i)}{f'(p_i)}$$

- Startnäherung $p_0 = 4.0$ führt auf

$$p_1 = 3.8805, \quad p_2 = 3.8806, \quad p_3 = 3.8806.$$

Übersicht

Funktionen mehrerer Variabler:

- abhängig von n reellen Variablen,
- nimmt Werte im m-dimensionalen Raum an

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$
$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n).$$

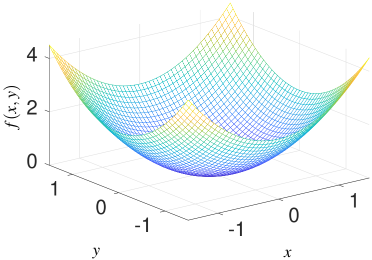
Beispiele:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \qquad (n = 2,\ m = 1),$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2^2) - \mathrm{e}^{5x_3} \qquad (n = 3,\ m = 1),$$
$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ x_1 x_2 \\ x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \end{pmatrix} \qquad (n = 2,\ m = 3).$$

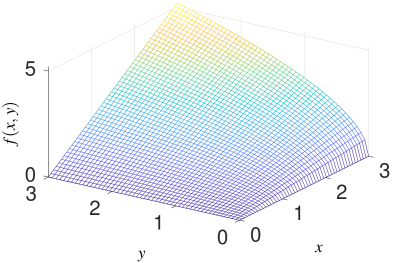
Zunächst bleiben wir bei

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad y = f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n).$$

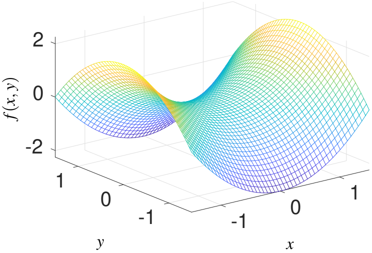
$f(x,y) = x^2 + y^2$



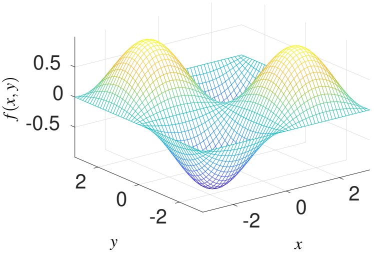
$f(x,y) = x\sqrt{y}$



$f(x,y) = x^2 - y^2$



$f(x,y) = -\sin(x) \cdot \sin(y)$



Vorgehen:

- Differentiation nach den einzelnen Variablen,
- alle anderen Variablen werden jeweils wie Konstanten behandelt,
- Ableitungsregeln gelten unverändert,
- statt „der" ersten Ableitung gibt es nun n partielle Ableitungen erster Ordnung,
- wonach differenziert wird, muss vermerkt werden.

Definition 2.24

Die partielle Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach x_i ist definiert als

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x)}{h}.$$

Bemerkung:

- alternative Definition mittels der 1D-Hilfsfunktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\varphi(z) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

- partielle Ableitung nach x_i lässt sich bestimmen als

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \varphi'(z).$$

Bestimmung partieller Ableitungen:

- wird nach x_i partiell differenziert, so werden alle anderen Variablen wie Konstanten behandelt,
- Ableitungsregeln für x_i aus dem 1D-Fall gelten unverändert.

Beispiele:

1. Für $f(x,y) = x^2 + y^2$ sind

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + 0 = 2x, \\ f_y &= 0 + 2y = 2y. \end{aligned}$$

2. Für $f(x,y) = x^2y^3$ sind

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy^3, \\ f_y &= 3x^2y^2. \end{aligned}$$

3. Für $f(x,y,z) = \sin(x^2 + y^2) - \mathrm{e}^{5z}$ sind

$$\begin{aligned} f_x &= 2x\cos(x^2 + y^2), \\ f_y &= 2y\cos(x^2 + y^2), \\ f_z &= -5\mathrm{e}^{5z}. \end{aligned}$$

Beispiele:

4. Für $f(x,y) = \sin(x) \cdot \ln(y)$ sind
$$f_x = \cos(x)\ln(y), \qquad f_y = \sin(x)\frac{1}{y}.$$

5. Für $f(x,y) = \sin(x+y) \cdot \ln(y)$ sind
$$\begin{aligned} f_x &= \cos(x+y)\ln(y), \\ f_y &= \cos(x+y)\ln(y) + \sin(x+y) \cdot \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

6. Für $K(q,l) = \sqrt{q(3l+1)} = q^{\frac{1}{2}}(3l+1)^{\frac{1}{2}}$ sind
$$\begin{aligned} K_q &= \frac{(3l+1)^{\frac{1}{2}}}{2q^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3l+1}}{2\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{3l+1}{4q}}, \\ K_l &= \frac{3\sqrt{q}}{2\sqrt{3l+1}} = \sqrt{\frac{9q}{12l+2}}. \end{aligned}$$

Definition 2.25

Der <u>Gradient</u> einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Zusammenfassung aller partieller Ableitungen von $f(x)$ in einem Vektor

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T .$$

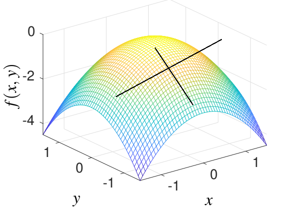
<u>Bemerkung</u>:

- Komponente i entspricht Steigung von f in Richtung der i-ten Koordinatenachse,
- $\nabla f(x)$ steht senkrecht auf der Isolinie der Funktion f durch x.

<u>Beispiel</u>:

$$f(x_1, x_2) = -x^2 - x_2^2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



Definition 2.26

Die <u>partielle Ableitung</u> zweiter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nach* x_i *und nach* x_j*, geschrieben*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),$$

ist definiert als die partielle Ableitung der partiellen Ableitung von $f(x)$ *nach* x_i *nach* x_j*.*

Reihenfolge der Ableitungen ist nicht entscheidend, es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Beispiel:

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^3 - x + y + 1$$

- partielle Ableitungen erster Ordnung

$$f_x = 2x + y - 1, \qquad f_y = x + 3y^2 + 1,$$

- partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (f_x)_x = (2x + y - 1)_x = 2, \\ f_{xy} &= (f_x)_y = (2x + y - 1)_y = 1, \\ f_{yy} &= (f_y)_y = (x + 3y^2 + 1)_y = 6y, \\ f_{yx} &= (f_y)_x = (x + 3y^2 + 1)_x = 1. \end{aligned}$$

Richtungsableitung

Ableitung in beliebige Richtung:

- Anstieg in Richtung der x_i-Achse ist partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$,
- Anstieg in beliebige Richtung $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ mit $\sum_{i=1}^n v_i^2 = 1$,
- Richtungsableitung

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Beispiel:

- Anstieg von $f(x, y) = x^2 + xy + y^3 - x + y + 1$ in Richtung $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ führt auf

$$m = \frac{1}{5}\big(3(2x + y - 1) + 4(x + 3y^2 + 1)\big),$$

- Auswertung etwa im Punkt $(x, y) = (1, 1)$ ergibt den Anstieg

$$m = \frac{6}{5} + \frac{16}{5} = \frac{22}{5}.$$

Bestimmung von Extrema von Funktionen mehrerer Variabler:

- Vorgehensweise grundsätzlich analog zum Fall eindimensionaler Funktionen,
- nun verschwinden n partielle Ableitungen in einem lokalen Extremum.

Satz 2.27 (Notwendige Bedingung)

Hat $f(x_1, \ldots, x_n)$ in x^* ein lokales Extremum und ist dort differenzierbar, so gilt

$$\nabla f(x^*) = (0, \ldots, 0)^T, \quad \text{d. h. es gilt} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0.$$

Dies ist ein System mit n Gleichungen und n Unbekannten.

Definition 2.28

Ist f differenzierbar und gilt $\nabla f(x^*) = 0$, so wird x^* eine kritische Stelle genannt.

Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines Minimums bzw. Maximums:

- mit Hilfe der Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen

$$H_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \qquad i = 1 \dots n \qquad j = 1 \dots n,$$

- H in x^* positiv (negativ) definit $\quad \Rightarrow \quad$ Minimum (Maximum),
- Definitheit einer quadratischen Matrix wird in der linearen Algebra genutzt,
- basiert auf sogenannten Eigenwerten, hier in der Vorlesung nicht behandelt, siehe etwa G. Fischer: *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*.

Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines Minimums bzw. Maximums:

- für $n = 2$, also $f(x,y)$:

$$f_{xx}(x^*,y^*) > 0 \text{ und } \left(f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right)(x^*,y^*) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x^*,y^*) \text{ lok. Minimum}$$
$$f_{xx}(x^*,y^*) < 0 \text{ und } \left(f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right)(x^*,y^*) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x^*,y^*) \text{ lok. Maximum}$$
$$f_{xx}(x^*,y^*) \neq 0 \text{ und } \left(f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right)(x^*,y^*) < 0 \quad \Rightarrow \quad (x^*,y^*) \text{ Sattelpunkt}$$
$$f_{xx}(x^*,y^*) = 0 \text{ oder } \left(f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right)(x^*,y^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^*,y^*) \text{ keine Aussage möglich,}$$

- für $n \geq 3$ wird's komplizierter, dort in dieser VL nur Bestimmung kritischer Stellen (notwendige Bedingung).

Beispiel 18

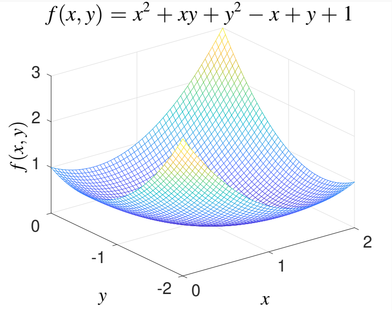
Gesucht sind die lokalen Extremstellen von $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x + y + 1$*.*

Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x = 2x + y - 1$$
$$f_y = x + 2y + 1$$

und die Forderung $f_x = f_y = 0$ *führt auf*

$$\begin{array}{rl} \mathrm{I} & 2x + y = 1 \\ \mathrm{II} & \underline{x + 2y = -1} \\ \mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II} & \quad -3y = 3. \end{array}$$



Die kritische Stelle ist folglich bei $y^* = -1$ *und* $x^* = 1$*.*
Hinreichende Bedingung in der Vorlesung.

Beispiel 19

Untersuche die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$*:*

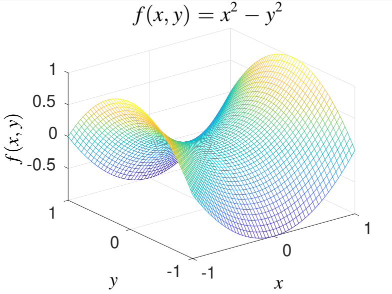
Partielle Ableitungen sind

$$f_x = 2x, \qquad f_y = -2y$$

Forderung $f_x = f_y = 0$ *führt auf* $(x,y) = (0,0)$*.*
Aber, für die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

gilt $f_{xx} > 0$ *und* $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$*, also ist* $(0,0)$ *ein* *Sattelpukt.*



Beispiel 20

Für eine Zweiklassengesellschaft sollen im Sinne maximaler Steuereinnahmen optimale Steuersätze berechnet werden.

Benferdinos:	*26 Gelatos Einkommen , Steuersatz* s_B,
	Steuerflucht: $s_B - 1/3 s_B^2$
Malochos:	*Anfangseinkommen:* $e_{M_0} =$ *1Gelato,*
	Steuersatz s_M
	Einkommen: $e_M = e_{M_0}(1 - s_M)/(1 + s_B)$
	Anzahl: 100mal soviele wie Benferdinos

Ziel: *maximale Steuereinnahmen in Abhängigkeit von den Steuersätzen* s_B *und* s_M

Extrema ohne Nebenbedingungen

Zielfunktion: $$g(s_M, s_B) = 26(1 - s_B + 1/3s_B^2)s_B + 100\frac{1 - s_M}{1 + s_B}s_M$$

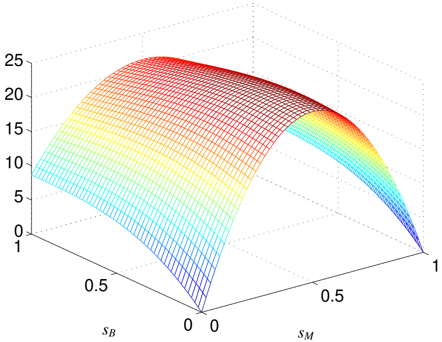
Partielle Ableitungen:
$$\frac{\partial}{\partial s_M}g = \frac{100}{1 + s_B}(-2s_M + 1), \qquad (1)$$
$$\frac{\partial}{\partial s_B}g = 26(s_B - 1)^2 - 100\frac{(1 - s_M)s_M}{(1 + s_B)^2}. \qquad (2)$$

Kritische Stellen:
$s_M^* = \frac{1}{2}$ wegen (1),
$s_B^* = 0.139$ wegen (2) mit $s_M^* = 0.5$.

Hinreichende Bedingung:
$$H_f(0.5, 0.139) = \begin{pmatrix} -175.5926251 & 0 \\ 0 & -10.93445612 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum.}$$

Funktionswert: $$g_{\max} = g(s_M^*, s_B^*) = 25.084$$

Steuereinnahmen $g(s_M, s_B)$:



Aufgabenstellung:

- Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ soll unter Einhaltung der Nebenbedingung $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ maximiert werden,

Naiver Ansatz:

- Nebenbedingung umstellen und in Zielfuktion einsetzen. Jedoch muss dafür die Nebenbedingung nach einer Variablen eindeutig auflösbar sein.

Ausweg für den allgemeinen Fall:

- Lagrange-Funktion,
- zunächst nur der Fall einer Nebenbedingung, also

$$f(x) \to \max \quad \text{mit der Nebenbed.} \quad g(x) = 0.$$

Extrema mit Nebenbedingungen

Aufgabe / Ansatz:

- maximiere/minimiere $f(x)$ unter der Nebenbedingung $g(x) = 0.$

Definition 2.29

Die Lagrange-Funktion zur genannten Optimierungsaufgabe lautet

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

mit dem Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$.

Satz 2.30 (Notwendige Bedingung)

Ist x^* ein lokales Extremum von $f(x)$ unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Lagrange-Multiplikator) mit

$$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla g(x^*) = 0.$$

Bemerkungen:

- Nebenbedingung muss oft noch in die Form $g(x) = 0$ gebracht werden,
- ist bspw.

$$3x_1 + 2x_2 = 17$$

gefordert, so hat $g(x_1, x_2)$ wegen $g(x_1, x_2) = 0$ die Gestalt

$$g(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 - 17.$$

Hinreichende Bedingung:

- wiederum mittels der Hesse-Matrix zweiter partieller Ableitungen.

Extrema mit Nebenbedingungen

<u>Allgemeine Vorgehensweise zur Berechnung von Extrema unter Nebenbedingungen</u>:

1. Aufstellen der Lagrange-Funktion (zu $g(x) = 0$)
$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x),$$
2. Bestimmung aller partieller Ableitungen
$$L_{x_1},\ L_{x_2}, \ldots, L_{x_n},\ L_\lambda,$$
3. Lösen des Gleichungssystems
$$\begin{aligned} L_{x_1}(x, \lambda) &= 0, \\ L_{x_2}(x, \lambda) &= 0, \\ &\vdots \\ L_{x_n}(x, \lambda) &= 0, \\ L_\lambda(x, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$
nach $x_1, \ldots, x_n$ und λ, dies sind $n+1$ Gleichungen für $n+1$ Variablen.

Extrema mit Nebenbedingungen

<u>Fall mehrerer Nebenbedingungen</u>:

- einzuhalten sind $g_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, k$,
- jede Nebenbedingung bekommt eigenen Lagrange-Multiplikator

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \qquad L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x),$$

- auch hier $\nabla L(x, \lambda) = 0$ lösen,
- Gleichungssystem mit $n + k$ Gleichungen
  und $n + k$ Unbekannten $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Beispiel 21

Unter der Nebenbedingung

$$x + y = -4$$

soll

$$f(x, y) = -(x^2 + y^2)$$

maximiert werden.

Beispiel 21

Unter der Nebenbedingung

$$x + y = -4$$

soll

$$f(x, y) = -(x^2 + y^2)$$

maximiert werden.

---

0. Nebenbedingung umstellen

$$g(x, y) = x + y + 4 = 0.$$

1. Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= -x^2 - y^2 + \lambda(x + y + 4). \end{aligned}$$

2. Partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} L_x &= -2x + \lambda, \\ L_y &= -2y + \lambda, \\ L_\lambda &= x + y + 4. \end{aligned}$$

Beispiel 21

Unter der Nebenbedingung

$$x + y = -4$$

soll

$$f(x, y) = -(x^2 + y^2)$$

maximiert werden.

---

3. Zu lösendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{r|rcrcrcr}
\mathrm{I} & -2x & & & + & \lambda & = & 0 \\
\mathrm{II} & & & -2y & + & \lambda & = & 0 \\
\mathrm{III} & x & + & y & & & = & -4 \\
\hline
\mathrm{IV} = \mathrm{I} - \mathrm{II} & -2x & + & 2y & & & = & 0 \\
\mathrm{III} & x & + & y & & & = & -4 \\
\hline
\mathrm{IV} + 2 \cdot \mathrm{III} & & & 4y & & & = & -8
\end{array}$$

Lösung

$$y^* = -2, \qquad x^* = -2, \qquad \lambda^* = -4.$$

Beispiel 21

Unter der Nebenbedingung

$$x + y = -4$$

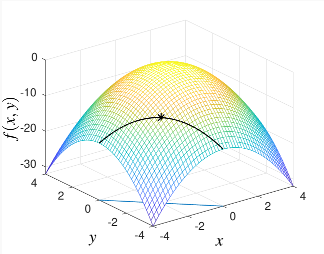
soll

$$f(x, y) = -(x^2 + y^2)$$

maximiert werden.

Dabei ist λ^* nicht weiter wichtig und der Extrempunkt ist

$$(x^*, y^*, f(x^*, y^*)) = (-2, -2, -8).$$



Beispiel 22

Maximiere die Cobb-Douglas-Funktion

$$f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2^2} \qquad \textit{unter der Nebenbedingung} \qquad g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 3.$$

Lösung:

- maximiere ersatzweise $F := f^3$,
- Lagrange-Funktion

$$L(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 3),$$

- zu lösende Gleichungen

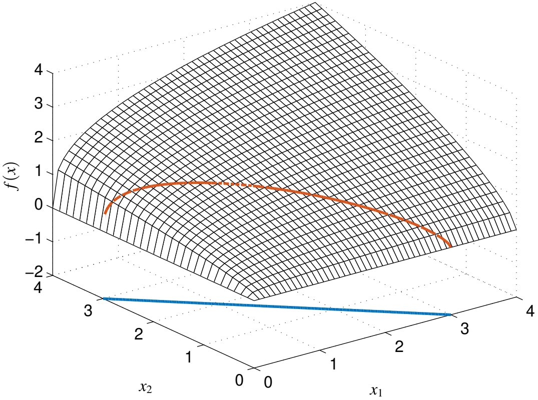
$$\begin{aligned} 0 &= L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = x_2^2 + \lambda \\ 0 &= L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 x_2 + \lambda \\ 0 &= L_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 - 3, \end{aligned}$$

- Ergebnisse

$$0 = 2x_1 x_2 - x_2^2 = (2x_1 - x_2)x_2$$

$$\rightarrow \quad x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad F = 4, \qquad f = \sqrt[3]{4} = 1.587.$$

Extrema mit Nebenbedingungen



Beispiel 23

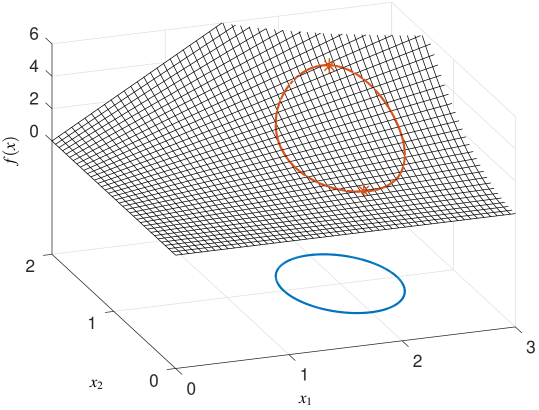
Maximiere $f(x, y) = xy^2$ *unter der Nebenbedingung* $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0.5^2$.

Lagrange-Funktion und Ableitungen

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= xy^2 + \lambda\big((x-2)^2 + (y-1)^2 - 0.25\big) \\ L_x &= y^2 + 2\lambda(x-2), \\ L_y &= 2xy + 2\lambda(y-1), \\ L_\lambda &= (x-2)^2 + (y-1)^2 - 0.25. \end{aligned}$$

Kritische Stellen (nur numerische Berechnung)

$$\begin{aligned} (x, y, \lambda) &= (1.94,\ 0.51,\ 1.97), \quad f(1.94,\ 0.51) = 0.505, \\ (x, y, \lambda) &= (2.16,\ 1.47,\ -6.73), \quad f(2.16,\ 1.47) = 4.67. \end{aligned}$$


6
4
2
0
$f(x)$
2
1
0
x_2
0
1
2
3
x_1

Aufgabe 20050131A3.
Finde die lokalen Extrempunkte der Funktion:

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + 7x - 14y + 3\,.$$

Wie ändern sich Extremstelle und Extremwert, wenn die Nebenbedingung

$$2x + 3y = 10$$

zu erfüllen ist?

Aufgabe 20050131A3.
Finde die lokalen Extrempunkte der Funktion:

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 7x - 14y + 3\,.$$

Wie ändern sich Extremstelle und Extremwert, wenn die Nebenbedingung

$$2x + 3y = 10$$

zu erfüllen ist?

Lösung I:

- Gradient

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x + y + 7 \\ 4y + x - 14 \end{pmatrix},$$

- $\nabla f = 0$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= -7, \\ x + 4y &= 14 \end{aligned}$$

- Lösung $\quad x = -6, y = 5 \quad \rightarrow \quad$ Kanditat für lokales Extremum,
- Check mittels Hesse-Matrix: Minimum bei $(-6,\ 5)$, Funktionswert $f(-6,5) = -53$.

Aufgabe 20050131A3.
Finde die lokalen Extrempunkte der Funktion:

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 7x - 14y + 3\,.$$

Wie ändern sich Extremstelle und Extremwert, wenn die Nebenbedingung

$$2x + 3y = 10$$

zu erfüllen ist?

Lösung II:

- Lagrange-Funktion

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + xy + 2y^2 + 7x - 14y + 3 + \lambda(2x + 3y - 10)$$

- Gradient

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 2x + y + 7 + 2\lambda \\ 4y + x - 14 + 3\lambda \\ 2x + 3y - 10 \end{pmatrix},$$

- Lösung des Gleichungssystems $\nabla f = 0$ führt auf

$$x^* = -\frac{97}{22}, \quad y^* = \frac{69}{11}, \quad f(x^*, y^*) = -45.20.$$

Aufgabe 20050131A3.

Finde die lokalen Extrempunkte der Funktion:

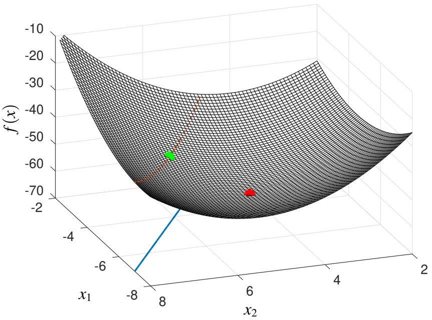
$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 7x - 14y + 3\,.$$

Wie ändern sich Extremstelle und Extremwert, wenn die Nebenbedingung

$$2x + 3y = 10$$

zu erfüllen ist?

Graphische Darstellung:



Übersicht

Integralrechnung:

- Umkehrung der Differentialrechnung,
- aus dem Änderungsverhalten wird auf die Funktion geschlossen (unbestimmtes Integral, Stammfunktion),
- mittels Stammfunktion $F(x)$ können Flächen zwischen $f(x)$, x-Achse sowie Grenzen $x = a$ und $x = b$ berechnet werden (bestimmtes Integral),
- formale Herleitung mittels Grenzwerten $\rightarrow$ führt auf Integrationsregeln.

Definition 2.31 (Unbestimmtes Integral)

Zu der Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$ heißt eine Funktion F Stammfunktion, wenn

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt unbestimmtes Integral,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

von f.

Bemerkung:

- ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $F + C$ eine SF für alle $C \in \mathbb{R}$,
- daher allgemeine Schreibweise

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Stammfunktionen einiger Standardfunktionen:

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\int \exp(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\exp(ax) + C$$

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$$

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

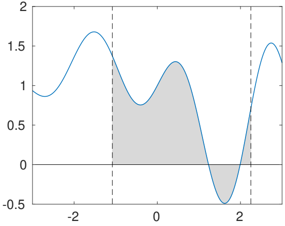
$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

Definition 2.32

Der Flächeninhalt *zwischen dem Graphen von f, der x-Achse und den Senkrechten bei $x = a$ und $x = b$ heißt* bestimmtes Integral*,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Flächeninhalte unterhalb der x-Achse zählen dabei negativ.



Berechnung eines bestimmten Integrals:

- mittels des unbestimmtes Integral bzw. einer beliebigen Stammfunktion.

Satz 2.33 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei F eine beliebige Stammfunktion von f. Es gilt

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Allgemein übliche Schreibweise:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Beispiele für die VL:

$$\int_1^4 x^2 \, \mathrm{d}x, \qquad \int_a^b x^k \, \mathrm{d}x, \qquad \int_1^3 x^{-3} \, \mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b \sin(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \int_0^\pi \sin(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^0 \mathbf{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

Berechnung von Integralen:

- Bestimmung von Stammfunktionen oft nicht trivial,
- Integrale sind linear bezüglich des Integranden

$$\int \alpha f(x)\ \mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\ \mathrm{d}x,$$
$$\int f(x) + g(x)\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

und additiv bezüglich des Integrationsbereiches

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}_{F(b)-F(a)} + \underbrace{\int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x}_{F(c)-F(b)} = \underbrace{\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x,}_{F(c)-F(a)}$$

- Bestimmung von Integralen mittels Stammfunktionen elementarer Funktionen und weiterer Regeln (Substitutionsregel, partielle Integration).

Substitutionsregel mit Intervallgrenzen (Umkehrung der Kettenregel):

- Berechnung von

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (*)$$

- Variablensubstitution $x = g(t)$ ergibt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'(t) \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t,$$

- Einsetzen in $(*)$ führt auf

$$\int\limits_a^b f(g(t))g'(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

<u>Substitution ohne Intervallgrenzen:</u>

- Berechnung von

$$\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

  mittels Variablensubstitution $x = g(t)$ führt auf

$$\int f(g(t))g'(t)\ \mathrm{d}t = \int f(x)\ \mathrm{d}x$$

- anschließende Rücksubstitution der Variablen ergibt

$$\int f(g(t))g'(t)\ \mathrm{d}t = F(g(t)) + C.$$

Partielle Integration (Umkehrung der Produktregel):

- fürs Ableiten gilt $(fg)' = f'g + fg'$,
- Integration beider Seiten führt auf

$$fg = \int f'g + \int fg',$$

und damit

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiele zur Substitution mit Intervallgrenzen:

1. Für
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(t))^2 \cos(t)\,\mathrm{d}t$$
eignet sich die Substitution $x = \sin(t)$ mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos(t),\ \mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$
$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(t))^2 \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Für
$$\int_0^3 2x \sin x^2\,\mathrm{d}x$$
eignet sich $z = x^2$ mit $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x,\ \mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x$
$$\int_0^3 2x \sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^9 \sin z\,\mathrm{d}z = 1 - \cos(9).$$

Beispiele zur Substitution mit Intervallgrenzen:

1. Für
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(t))^2 \cos(t)\,\mathrm{d}t$$
eignet sich die Substitution $x = \sin(t)$ mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos(t),\ \mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$
$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(t))^2 \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Für
$$\int_0^3 2x \sin x^2\,\mathrm{d}x$$
eignet sich $z = x^2$ mit $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x,\ \mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x$
$$\int_0^3 2x \sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^9 \sin z\,\mathrm{d}z = 1 - \cos(9).$$

Beispiel zur Substitution ohne Intervallgrenzen:

Für

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x} \, \mathrm{d}x$$

eignet sich $y = x^3 - x^2 + x$ mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 2x + 1$

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \ln(x^3 - x^2 + x).$$

$\rightarrow$ Vorgehen allgemein zur Berechnung von Integralen der Form

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)} \, \mathrm{d}t$$

nutzen.

<u>Beispiel zur Substitution ohne Intervallgrenzen</u>:

Für

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x}\,\mathrm{d}x$$

eignet sich $y = x^3 - x^2 + x$ mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 2x + 1$

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln(x^3 - x^2 + x).$$

$\rightarrow$ Vorgehen allgemein zur Berechnung von Integralen der Form

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

nutzen.

Beispiel zur partiellen Integration:

1. Für die Berechnung des Integrals von $\ln(x)$ ergibt sich mittels

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

   und der Nebenrechnung

$$\begin{aligned} f &= x, & f' &= 1 \\ g &= \ln(x), & g' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

   somit

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x \ln|x| - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \ln|x| - x + C = x(\ln|x| - 1) + C. \end{aligned}$$

Beispiel zur partiellen Integration:

2. Für $x\sin(x)$ ergibt sich mit

$$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{\sin(x)}_{f'(x)}\,\mathrm{d}x$$

und der Nebenrechnung

$$\begin{aligned} f &= -\cos(x) & \qquad f' &= \sin(x) \\ g &= x, & \qquad g' &= 1 \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} \int_0^3 x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -x\cos(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 -\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -3\cos 3 + 0 - \left(-\sin(x)\Big|_0^3\right) \\ &= -3\cos(3) + \sin(3) - 0 = -3\cos(3) + \sin(3). \end{aligned}$$

Durchschnittlicher Wert einer Funktion $f(x)$ über Intervall $I = [a, b]$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel 24

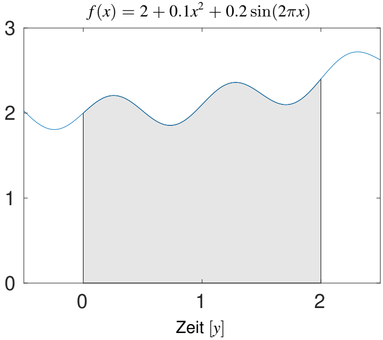
Der Wert einer Aktie verhielt sich in den letzten beiden Jahren wie

$$f(x) = 2 + 0.1x^2 + 0.2\sin(2\pi x), \qquad x \in [0, 2].$$

Durchschnittlicher Aktienwert

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\int_0^2 2 + 0.1x^2 + 0.2\sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(2x + \frac{0.1}{3}x^3 - \frac{0.1}{\pi}\cos(2\pi x)\right)\Big|_0^2 \\ &= 2.133 \end{aligned}$$

Anwendung Integration



Numerische Integration:

- wird z. B. genutzt, falls keine der analytischen Methoden erfolgreich anwendbar ist,
- näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

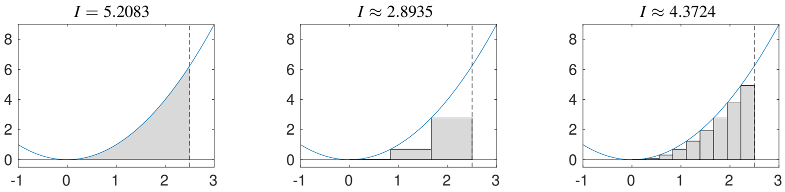
- nutze bestimmte Funktionswerte,
- Schrittweite $h = (b-a)/n$, $\qquad$ ($n+1$ Stützstellen),
- Stützstellen $x_i = a + i \cdot h$, für $i = 0, 1, 2, \ldots n$,
- Funktionswerte $y_i = f(x_i)$, für $i = 0, 1, 2, \ldots n$.

<u>Numerische Integration</u>:

- wird z. B. genutzt, falls keine der analytischen Methoden erfolgreich anwendbar ist,
- näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

- nutze bestimmte Funktionswerte,
- Schrittweite $h = (b-a)/n$, $\qquad (n+1$ Stützstellen),
- Stützstellen $x_i = a + i \cdot h$, für $i = 0, 1, 2, \ldots n$,
- Funktionswerte $y_i = f(x_i)$, für $i = 0, 1, 2, \ldots n$.

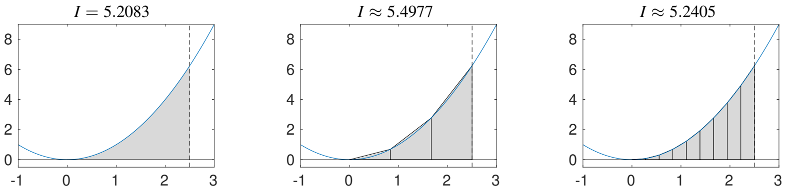


Numerische Integration:

- wird z. B. genutzt, falls keine der analytischen Methoden erfolgreich anwendbar ist,
- näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

- nutze bestimmte Funktionswerte,
- Schrittweite $h = (b-a)/n$, $\qquad (n+1$ Stützstellen),
- Stützstellen $x_i = a + i \cdot h$, für $i = 0, 1, 2, \ldots n$,
- Funktionswerte $y_i = f(x_i)$, für $i = 0, 1, 2, \ldots n$.



Einfache Methoden:

- Trapezregel

$$T_n = T(f,a,b,n) = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right),$$

- Simpsonregel (n gerade wählen)

$$S_n = S(f,a,b,n) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n).$$

Restglied (Fehlerwerte):

- Trapezregel (f zweimal stetig differenzierbar)

$$I = T_n + R_n^{(T)} \quad \text{mit} \quad R_n^{(T)} = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (a,b),$$

- Simpsonregel (f viermal stetig differenzierbar)

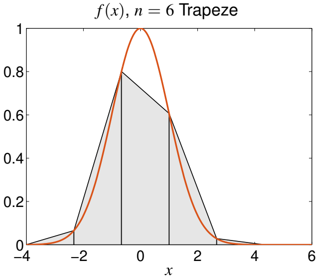
$$I = S_n + R_n^{(S)} \quad \text{mit} \quad R_n^{(S)} = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (a,b).$$

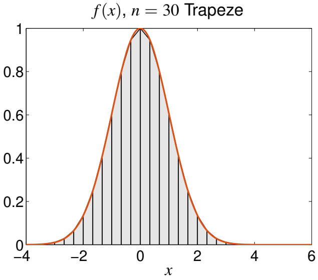
Beispiel:

- Bestimmung von
$$I = \int_{-4}^{6} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \approx 2.506548883,$$
- Stammfunktion nicht zugänglich,

Beispiel:

- Bestimmung von
$$I = \int_{-4}^{6} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \approx 2.506548883,$$
- Stammfunktion nicht zugänglich,
- Trapezregel mit $n = 6$ bzw. $n = 30$





Beispiel:

- Bestimmung von

$$I = \int_{-4}^{6} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \approx 2.506548883,$$

- Stammfunktion nicht zugänglich,
- Fehlerwerte für Trapez- und Simpsonregel (mit $\hat{I} = 2.506548883$)

n	$\lvert T_n - \hat{I} \rvert$	$\lvert S_n - \hat{I} \rvert$
6	$3.52 \cdot 10^{-3}$	$9.08 \cdot 10^{-2}$
10	$9.21 \cdot 10^{-5}$	$1.21 \cdot 10^{-2}$
20	$2.65 \cdot 10^{-5}$	$4.66 \cdot 10^{-6}$
30	$1.21 \cdot 10^{-5}$	$1.07 \cdot 10^{-6}$
100	$1.12 \cdot 10^{-6}$	$9.59 \cdot 10^{-9}$
200	$2.79 \cdot 10^{-7}$	$6.04 \cdot 10^{-10}$

Trick:

- bei mehrfacher Auswertung von T_n mit Verdopplung der Streifenzahlen gilt

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{2i-1}{2}h),$$

- Näherungswerte (m Stützstellen für erste Näherung, z.B. $m = 1$, Basisschrittweite $\bar{h} = (b-a)/m$)

$$I_{i,0} = T_{2^i m} \qquad \text{(sum. Trapezregel zu } h = \bar{h}/2^i\text{)},$$

- Romberg-Regel zur Verbesserung der Approximation

$$I_{i,j} = \frac{4^j I_{i,j-1} - I_{i-1,j-1}}{4^j - 1}, \qquad j = 1, \ldots, i.$$

Unendliche Integrationsgrenzen

Definition 2.34

Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $a \in \mathbb{R}$. Falls der Grenzwert

$$\lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\, \mathrm{d}x$$

existiert, so nennen wir

$$\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$$

ein uneigentliches Integral.

Bemerkung:

- falls der Integrand an einer Grenze nicht definiert ist, so wird dies auch als ein uneigentliches Integral bezeichnet,
- zwei Beispiele hierzu sind

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \infty, \quad \int_0^1 \ln(x)\, \mathrm{d}x = -1.$$

Beispiele mit unendliche Integrationsgrenzen:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \exp(x)\,\mathrm{d}x = -\exp(-x)\big|_0^\infty = 0-(-1) = 1,\\
&\int_1^\infty \frac{1}{x}^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big|1^\infty = 0-(-1) = 1,\\
&\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)\big|_{-\infty}^\infty = -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}
$$

Beispiel mit kritischen Grenzen:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= -\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(-1+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(1-\varepsilon)\\
&= -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}
$$

Gaußsches Fehlerintegral:

- von besonderer Bedeutung u. A. in der Statistik,
- es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

  oder anders geschrieben

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\, \mathrm{d}t = 1,$$

- Fehlerfunktion

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\, \mathrm{d}t,$$

  mit

$$\mathrm{erf}(0) = 0.5,$$

- die Fehlerfunktion steht in jedem vernünftigen Computerprogramm zur Verfügung.