Übersicht

Übersicht

Einfachstes Beispiel eines Vektors:

- n-Tupel reeller Zahlen,
- Zeilenvektor $\quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad$ mit $x_i \in \mathbb{R}$,
- Spaltenvektor

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

- Beispiele

$$w = (35, 2, 17), \qquad z = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Transponieren eines Vektors:

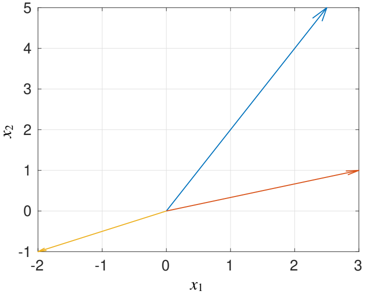
- macht aus einem Zeilenvektor eine Spaltenvektor und umgekehrt

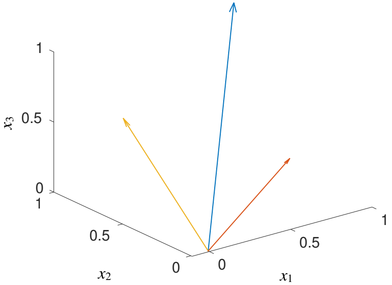
$$(35, 2, 17)^T = \begin{pmatrix} 35 \\ 2 \\ 17 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 18 \end{pmatrix}^T = (9, 11, 18).$$

Visualisierung in der Ebene:

- Zwei- und dreidimensionale Vektoren werden häufig als Pfeile visualisiert,
- Einige Vektoren:





Rechenregeln für Vektoren:

- Addition von Vektoren gleichen Formats

$$(x_1,\, x_2, \ldots, x_n)^T + (y_1,\, y_2, \ldots, y_n)^T = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T,$$

- Subtraktion von Vektoren gleichen Formats

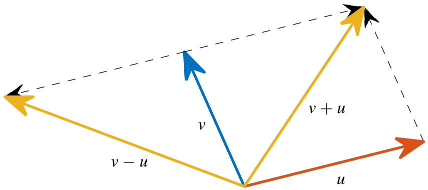
$$(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n),$$

- Multiplikation mit Skalaren (d. h. Zahlen)

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$

- Vektoren unterschiedlichen Formats lassen sich nicht Addieren.

Addition und Subtraktion von Vektoren - graphisch:



Definition 3.1

Vektoren sind Elemente eines Vektorraums.

Ein Vektorraum V *ist eine nichtleere Menge mit zwei Operationen*

(i)	$x, y \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, x + y \in V$	*Addition*
(ii)	$\alpha \in K\,,\ x \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, \alpha x \in V$	*Multiplikation mit Skalar*

Definition 3.1

Vektoren sind Elemente eines Vektorraums.

Ein Vektorraum V ist eine nichtleere Menge mit zwei Operationen

(i)	$x, y \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, x + y \in V$	*Addition*
(ii)	$\alpha \in K\,,\ x \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, \alpha x \in V$	*Multiplikation mit Skalar*

Anmerkungen:

- Vektoren aus verschiedenen Vektorräumen lassen sich im allgemeinen nicht sinnvoll addieren,
- $x + y$ ist nicht ausfürbar, wenn die Formate nicht zu einander passen,
- Vektorräume werden auch lineare Räume genannt,
- Standardfall ist $K = \mathbb{R}$, eventuell $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{C}$.

Definition 3.1

<u>Vektoren</u> sind Elemente eines Vektorraums.

Ein <u>Vektorraum</u> V ist eine nichtleere Menge mit zwei Operationen

(i)	$x, y \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, x + y \in V$	*Addition*
(ii)	$\alpha \in K\,,\; x \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, \alpha x \in V$	*Multiplikation mit Skalar*

<u>Beispiel 1</u>: Ist $V = \mathbb{R}^n$ ein VR?

- $V = \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ ist ein Vektorraum, denn

(i) $$\alpha(x_1, \ldots, x_n)^T = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

(ii) $$(x_1, \ldots, x_n)^T + (y_1, \ldots, y_n)^T) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 3.1

Vektoren sind Elemente eines Vektorraums.

Ein Vektorraum V ist eine nichtleere Menge mit zwei Operationen

(i)	$x, y \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, x + y \in V$	*Addition*
(ii)	$\alpha \in K\,,\ x \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, \alpha x \in V$	*Multiplikation mit Skalar*

Beispiel 2: Ist $V = \mathbb{R}^n_+$ ein VR?

- $V = \mathbb{R}^n_+$ ist kein Vektorraum, denn z.B. für $n = 2$:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\in V} - \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\in V} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}_{\notin V},$$

also ist die Linearität gebrochen.

Definition 3.1

<u>Vektoren</u> sind Elemente eines Vektorraums.

Ein <u>Vektorraum</u> V ist eine nichtleere Menge mit zwei Operationen

(i)	$x, y \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, x + y \in V$	*Addition*
(ii)	$\alpha \in K\,,\ x \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, \alpha x \in V$	*Multiplikation mit Skalar*

<u>Beispiel 3</u>: Menge aller Polynome bis zum Grad p

- Sei V die Menge aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich p, also z.B. für $p = 4$ sind

$$x^2 \in V, \qquad x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 4x - 1 \in V, \qquad \sin(x) \notin V,$$

- V ist ein VR, denn

(i)	f, g Polynome vom Grad $\leq p$	$\Rightarrow$	$f + g$ Polyn. vom Grad $\leq p$
(ii)	f Polynom vom Grad $\leq p$	$\Rightarrow$	αf Polynom vom grad $\leq p$.

Definition 3.1

Vektoren sind Elemente eines Vektorraums.

Ein Vektorraum V ist eine nichtleere Menge mit zwei Operationen

(i)	$x, y \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, x + y \in V$	*Addition*
(ii)	$\alpha \in K\,,\ x \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, \alpha x \in V$	*Multiplikation mit Skalar*

Beispiel 4: Ist $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = 0\}$ ein VR?

- $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = 0\}$ ist VR, denn

(i) $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in V} + \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in V} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in V}$, (ii) $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$,

Definition 3.1

Vektoren sind Elemente eines Vektorraums.

Ein Vektorraum V *ist eine nichtleere Menge mit zwei Operationen*

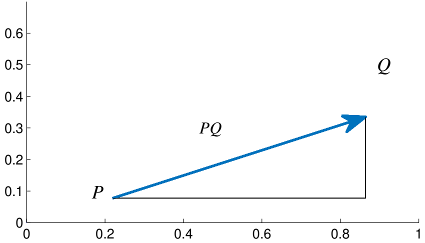
(i)	$x, y \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, x + y \in V$	*Addition*
(ii)	$\alpha \in K\,,\ x \in V$	$\Rightarrow$	$\exists\, \alpha x \in V$	*Multiplikation mit Skalar*

Beispiel 5: Ist $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_3 = 1\}$ ein VR?

$V = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_3 = 1\}$ ist kein VR, denn

(i) $$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in V} + \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in V} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\notin V},$$

Ebener Vektor von Punkt P nach Punkt Q:



Idee der Normen:

- Vektoren eine Maßzahlen zuordnen,
- für die Maßzahlen gelten bestimmte Rechenregeln,
- verschiedene Normen ergeben verschiedene Maßzahlen.

Definition 3.2

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ (oft ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Eine Vektornorm ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{K}$ und definiert die Länge eines Vektors sowie Abstände in V. Sie besitzt die Eigenschaften

$$\|x\| \geq 0 \quad \textit{und} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = (0, \ldots, 0)^T \qquad \textit{(Definitheit)},$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \textit{(Linearität)},$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in V \qquad \textit{(Dreiecksungleichung)}.$$

Vektornormen

Definition 3.3

Für $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ ist die l^p-Norm

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}.$$

Oft genutzte Standardnorm:

- Euklidische Norm (l^2-Norm) in $\mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

- euklidische Länge der Vektoren.

Beispiele für p-Normen:

- Betragssummennorm (l^1-Norm)

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|,$$

- Euklidische Norm (l^2-Norm)

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

- Maximumnorm (l^∞-Norm)

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} |x_i|,$$

- zu $x = (1, -2, 3, -4) \in \mathbb{R}^4$ sind

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{30} \approx 5.48, \\
\|x\|_1 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \\
\|x\|_\infty &= 4.
\end{aligned}$$

Metrik:

- Abstandsmessung zwischen zwei Punkten

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

- Beispiel für $V = \mathbb{R}^2$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Abstand zwischen x und y ist

$$d(x, y) = \sqrt{(1 - (-3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Definition 3.4

Das Euklidische Skalarprodukt (inneres Produkt) von Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ *ist*

$$(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Weiter heißen zwei Vektoren x, y *orthogonal, wenn* $(x, y) = 0$ *gilt.*

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = -1 + 6 = 5$$

Bemerkungen:

- die Euklidische Norm lässt sich definieren als $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$,
- es gibt noch Vektorprodukt und Spatprodukt – lassen wir aus.

Definition 3.5

Eine $m \times n$-Matrix hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Die einzelnen Einträge a_{ij} (i-te Zeile, j-te Spalte) werden Elemente genannt.

Beispiel für Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\#\text{Zeilen} \times \#\text{Spalten}} = \mathbb{R}^{3 \times 2}.$$

Weiteres Beispiel für Matrizen:

$$B = \begin{pmatrix} 14 & \pi & 2\mathbf{e} \\ \sqrt{3} & -5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Komponentenweise Definition:

$$C \in \mathbb{R}^{3\times 2},\ c_{11} = 0,\ c_{32} = 5,\ c_{12} = c_{22} = 1,\ c_{21} = c_{31} = -1$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

- für $m = n$ wird A eine quadratische Matrix genannt,
- Vektoren sind spezielle Matrizen,
  Zeilenvektoren sind Matrizen aus $\mathbb{R}^{1\times n}$,
  Spaltenvektoren sind Matrizen aus $\mathbb{R}^{m\times 1}$,
- Transponieren, also A^T, vertausch Zeilen und Spalten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^T = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Matrix-Vektor-Multiplikation</u>:

- nur für passende Formate (!),
- $A \cdot x$ geht nur für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix},$$

- das Produkt ist hier also ein Spaltenvektor.

Beispiele:

- ein Fall mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $x \in \mathbb{R}^2$ also $A \cdot x \in \mathbb{R}^3$, mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot(-1) \\ 3\cdot 7 + 4\cdot(-1) \\ 5\cdot 7 + 6\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 29 \end{pmatrix},$$

- ein Fall mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $x \in \mathbb{R}^3$ also $A \cdot x \in \mathbb{R}^2$, mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Beispiele:

- ein Fall mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $x \in \mathbb{R}^2$ also $A \cdot x \in \mathbb{R}^3$, mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 29 \end{pmatrix},$$

- ein Fall mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $x \in \mathbb{R}^3$ also $A \cdot x \in \mathbb{R}^2$, mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation:

- nur für passende Formate (!),
- $A \cdot B$ geht nur für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$,
- gerechnet wird *Zeile mal Spalte*

$$(A \cdot B)_{iq} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jq}, \qquad i = 1, \ldots m,\ j = 1, \ldots k,$$

- das Produkt ist hier also eine $m \times k$-Matrix,
- i. a. gilt nicht $AB = BA$ (!),
- die Matrix-Vektor-Multiplikation ist ein Spezialfall der Matrixmultiplikation.

Beispiel zur Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 + 0\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 2 & 3\cdot 0 + 0\cdot 1 & 3\cdot 0 + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

Beispiel zur Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 + 0\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 2 & 3\cdot 0 + 0\cdot 1 & 3\cdot 0 + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel zur Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 0+2\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 0 & 1\cdot 1+1\cdot 2\\ 0\cdot 1+1\cdot 2 & 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 1\\ 3\cdot 1+0\cdot 2 & 3\cdot 0+0\cdot 1 & 3\cdot 0+0\cdot 0 & 3\cdot 1+0\cdot 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Weiteres Beispiel zur Matrixmultiplikation:

- ein Fall mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 2 + 4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Übersicht

Definition 3.6

Das System

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

heißt lineares Gleichungssystem (LGS) mit den Koeffizienten a_{ij}, den rechten Seiten b_i und den (unbekannten) Variablen x_j.

Kurzschreibweise:

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definition 3.6

Das System

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

heißt lineares Gleichungssystem (LGS) mit den Koeffizienten a_{ij}, den rechten Seiten b_i und den (unbekannten) Variablen x_j.

Kurzschreibweise:

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Beispiel 25

Gegeben sei das LGS

$$3x_1 + 4x_2 = 17$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

oder in Kurzschreibweise

$$Ax = b \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Gesucht ist

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

so dass $Ax = b$.

Lösung: $x_1 = 3, x_2 = 2$.

Definition 3.7

Verschwinden in einem LGS alle b_i, d. h. $b_i = 0,\ i = 1, \ldots, m$, so heißt das System homogen, ist mindestens ein $b_k \neq 0$, so heißt es inhomogen.

Ein Vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, der das LGS $Ax = b$ erfüllt, heißt Lösung und die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$, die das LGS erfüllen, heißt Lösungsmenge oder allgemeine Lösung.

Gauß Algorithmus

Die Lösungsmenge eines LGS bleibt unverändert, wenn:

- zwei Gleichungen vertauscht werden,
- eine Gleichung mit $\alpha \neq 0$ multipliziert wird,
- ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addiert wird.

Gauß Algorithmus:

- stellt eine Strategie zum Lösen des Gleichungssystems $Ax = b$ dar,
- das LGS wird gelöst oder als nicht lösbar erkannt, ggf. entstehen auch vieldeutige Lösungen,
- besteht aus zwei Schritten, der Vorwärtselimination und der Rückwärtssubstitution.

Gauß Algorithmus

Vorwärtselimination:

- Vielfache einer ausgewählten Gleichung werden von den jeweils anderen Gleichungen subtrahiert,
- umgeformte Gleichungen haben eine unbekannte Variable weniger,
- Vorgang wird zwecks Eliminierung weiterer unbekannter Variablen wiederholt,
- nur eine Gleichung, die dann zu lösen ist, bleibt übrig.

Rückwärtssubstitution:

- die bereits ermittelten Variablen werden von unten nach oben in die jeweils ausgewählten Gleichungen eingesetzt,
- man erhält jeweils eine Lösung für eine weitere Variable.

Beispiel 26

a) Vorwärtseliminierung:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrl}
I & 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 6 & & \ast \\
II & x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 & & \\
III & 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 2 & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcrcrll}
I & 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 6 & I' & \\
II - \frac{1}{2}\,I: & 0x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & -3 & II' & \ast \\
III\text{-}2\,I: & 0x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & -10 & III' & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
III' - \frac{-7}{-3}\,II': \qquad 0x_2 - 12x_3 = -3 \qquad III'' \quad \ast
$$

$$
\Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{4}
$$

Das System I, II, III wird umgeformt zu I, II', III"

Beispiel 26 (Fortsetzung)

b) Rücksubstitution:

$x_3 = \frac{1}{4}$ *in II':* $\quad -3x_2 + 6 \cdot \frac{1}{4} = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{1}{4}$ *in I:* $\quad 2x_1 + 4 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{4}$

Lösung:

$$x = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1.50 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr|r|r}
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & -2 & 0 & -2 & 1 & \\
 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \\
 & -2 & -2 & 0 & 3 & 1 \\
\hline
 & & -2 & -2 & 2 & \\
 & & -2 & 2 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & 4 & 0 &
\end{array}$$

Beispiel 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 0 \\ x_3 &= (2 + 2 \cdot 0)/(-2) = -1 \\ x_2 &= (1 + 2 \cdot 0)/(-2) = -\frac{1}{2} \\ x_1 &= -1 - 0 - (-1) - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 0\right)^T$ ist eindeutige Lösung.

Beispiel 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr|r|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\
\hline
 & -2 & 0 & -2 & 1 & \\
 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0
\end{array}$$

Beispiel 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \alpha$$

$$x_3 = (2 + 2\alpha)/(-2) = -1 - \alpha$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \alpha \qquad\qquad (\text{wegen } -2x_2 - 2\alpha = 1)$$

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \alpha + 1 + \alpha - \alpha = 2.5 + \alpha$$

$$x = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -0.5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4×4 (linear abhängig):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

- letzte Zeile ist Summe der ersten drei Zeilen,
- bei der rechten Seite ebenfalls $\Rightarrow$ letzte Zeile redundant,
  $\Rightarrow$ Lösungsmenge identisch der vom 3×4 System.

Beispiel 4×4 (linear abhängig):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr|r|r}
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
\hline
 & -2 & 0 & -2 & 1 & \\
 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \\
 & -2 & -2 & -4 & 3 & 1 \\
\hline
 & & -2 & -2 & 2 & \\
 & & -2 & -2 & 2 & \\
\hline
 & & & 0 & 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 3$$

Beispiel 4×4 (linear abhängig):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \alpha \\ x_3 &= -1 - \alpha \\ x_2 &= (1 + 2\alpha)/(-2) = -\frac{1}{2} - \alpha \\ x_1 &= -1 - \alpha + 1 + \alpha + \frac{1}{2} + \alpha = \frac{1}{2} + \alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 0\right)^T + \alpha\,(1, -1, -1, 1)^T, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Beispiel 4×4 (Widerspruch):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Widerspruch:

- letzte Zeile ist Summe der ersten drei Zeilen,
- aber $b_4 \neq b_1 + b_2 + b_3$.

Beispiel 4×4 (Widerspruch):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & -1 & 2 \\
\hline
 & -2 & 0 & -2 & 1 \\
 & 0 & -2 & -2 & 2 \\
 & -2 & -2 & -4 & 5 \\
\hline
 & & -2 & -2 & 2 \\
 & & -2 & -2 & 4 \\
\hline
 & & & 0 & 2
\end{array}$$

Widerspruch:

letzte Gleichung wird zu $0x_4 = 2$.

Problemstellung:

- mehrere Gleichungssysteme, alle dieselbe Matrix A jedoch unterschiedliche b,
- LR-Zerlegung speichert die Schritte der Eliminierung in L,
- zusätzlicher Rechenaufwand ab dem 2. System: Rücksubstitution $(2\times)$

LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{21} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Optionale Zeilentausche:

- falls der führende Eintrag null ist, müssen Zeilen getauscht werden,
  $\rightarrow$ sogenannte Pivotisierung (lassen wir hier weg).

Berechnung einer Lösung:

- in Matrixschreibweise

$$Ax = L\underbrace{Rx}_{y} = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b,\; Rx = y,$$

- oder komponentenweise

$$y_i = \frac{1}{L_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j\Big), \quad i = 1, \ldots, n,$$

sowie anschließend

$$x_i = \frac{1}{R_{ii}}\Big(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} R_{ji}x_j\Big), \quad i = n, n-1, \ldots, 2, 1.$$

Beispiel 27

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem in Kurzschreibweise

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 2 & 4 & -2 \\
 & 1 & -1 & 5 \\
 & 4 & 1 & -2 \\
\hline
1 & 2 & 4 & -2 \\
-\frac{1}{2} & 0 & -3 & 6 \\
-2 & 0 & -7 & 2 \\
\hline
0 & 2 & 4 & -2 \\
1 & 0 & -3 & 6 \\
-\frac{7}{3} & 0 & 0 & -12
\end{array}
$$

Faktoren zur Vorwärtseliminierung werden negiert und ergeben die Spalten L als

$$
L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}
$$

und es geht weiter mit dem Lösen von $Ly = b$.

Cramersche Regel:

- basiert auf Determinanten und sogenannten Adjunkten,
- nur anwendbar, wenn es eine eindeutige Lösung gibt,
- Formeln auf folgender Folie.

Determinanten:

- Kennzahl (aus $\mathbb{R}$) quadratischer Matrizen, Schreibeweise $\det(A)$ oder auch $|A|$,
- A besitzt eine Inverse $\quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$,
- z.B. für $n = 2$

$$\det(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Cramersche Regel:

- für $n = 2$ gilt

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

- für $n = 3$ gilt

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} + b_2a_{13}a_{32} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{13}a_{22}}{\det(A)},$$
$$x_2 = \frac{-b_1a_{21}a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + b_2a_{11}a_{33} - b_2a_{13}a_{31} - b_3a_{11}a_{23} + b_3a_{13}a_{21}}{\det(A)},$$
$$x_3 = \frac{b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{11}a_{32} + b_2a_{12}a_{31} + b_3a_{11}a_{22} - b_3a_{12}a_{21}}{\det(A)}$$

mit

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Definition 3.8

Falls für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$AB = BA = I = I_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

so heißt B Inverse von A (Bezeichnung: $B = A^{-1}$).
Gleichzeitig ist dann auch A die Inverse von B ($A = B^{-1}$).

Anwendung:

- Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

als

$$x = A^{-1}b,$$

- es ist jedoch selten effektiv, die Inverse zu berechnen, wenn nur ein Gleichungssystem mit der Systemmatrix A gelöst werden soll.

Inverse Matrix

Existenz der Inversen:

- nur quadratisch Matrizen ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$) können eine Inverse haben,
- dies ist aber nicht hinreichend, denn nicht invertierbar ist beispielsweise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

- die Spalten von A müssen linear unabhängig sein (siehe dazu Definition 3.10).

Einfacher Fall $n = 2$:

- Inverse existiert, falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, dann

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- Hauptdiagonalenelemente tauschen, Nebendiagonalenelemente wechseln das Vorzeichen, alles durch die Determinante teilen.

Aufgabe A4:

Uli stellt einen Haushaltsplan für die nächste Saison auf und will die Solde für David, Mats, Jerome und Joshua festlegen. Folgendes ist zu berücksichtigen: Joshua soll soviel bekommen, wie David und Mats zusammen. Mats und Joshua wiederum sollen zusammen soviel erhalten wie Jerome und David zusammen. David soll 2 Mio. € mehr bekommen als Mats. Wenn David 20% mehr bekäme, würden er und Mats zusammen 1 Mio. € mehr bekommen als Joshua.

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die vier Solde auf und bestimmen Sie diese.

Lösung (Sold in Mio. €):

- Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x_{Jo} &= x_{Da} + x_{Ma},\\
x_{Ma} + x_{Jo} &= x_{Da} + x_{Je},\\
x_{Da} &= x_{Ma} + 2,\\
1.2x_{Da} + x_{Ma} &= x_{Jo} + 1,
\end{aligned}
$$

- lineares Gleichungsystem

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1.2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{Da} \\ x_{Ma} \\ x_{Je} \\ x_{Jo} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

- $x_{Da} = 5$, $x_{Ma} = 3$, $x_{Je} = 6$, $x_{Jo} = 8$.

Alte Klausuraufgabe

Aufgabe A4:

Uli stellt einen Haushaltsplan für die nächste Saison auf und will die Solde für David, Mats, Jerome und Joshua festlegen. Folgendes ist zu berücksichtigen: Joshua soll soviel bekommen, wie David und Mats zusammen. Mats und Joshua wiederum sollen zusammen soviel erhalten wie Jerome und David zusammen. David soll 2 Mio. € mehr bekommen als Mats. Wenn David 20% mehr bekäme, würden er und Mats zusammen 1 Mio. € mehr bekommen als Joshua.

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die vier Solde auf und bestimmen Sie diese.

Lösung (Sold in Mio. €):

- Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{Jo} &= x_{Da} + x_{Ma}, \\ x_{Ma} + x_{Jo} &= x_{Da} + x_{Je}, \\ x_{Da} &= x_{Ma} + 2, \\ 1.2x_{Da} + x_{Ma} &= x_{Jo} + 1, \end{aligned}$$

- lineares Gleichungsystem

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1.2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{Da} \\ x_{Ma} \\ x_{Je} \\ x_{Jo} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- $x_{Da} = 5$, $x_{Ma} = 3$, $x_{Je} = 6$, $x_{Jo} = 8$.

4. Aufgabe.

Der Umsatz einer Firma war in der EU dreimal so hoch wie der in Asien, Amerika und Australien zusammen. Amerika brachte \$2 Mio mehr als Australien und Asien zusammen. Selbst wenn Asien um 150% zulegte, so schmölze der Vorsprung Amerikas auf Asien und Australien zusammen nur auf \$0.8 Mio. EU und Australien setzen das 15fache des asiatischen Marktes um.

Berechne die Umsätze in den genannten Regionen.

Lösung:

- Gleichungen

$$
\begin{aligned}
3x_{As} + 3x_{Am} + 3x_{Au} &= x_{EU}, \\
x_{Am} &= x_{Au} + x_{As} + 2, \\
2.5x_{As} + x_{Au} + 0.8 &= x_{Am}, \\
x_{EU} + x_{Au} &= 15x_{As},
\end{aligned}
$$

- lineares Gleichungssystem

$$
\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2.5 & -1 & 1 & 0 \\ -15 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{As} \\ x_{Am} \\ x_{Au} \\ x_{EU} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -0.8 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

- $x_{As} = \$0.8$ Mio., $x_{Am} = \$2.97$ Mio., $x_{Au} = \$0.17$ Mio., $x_{EU} = \$11.8$ Mio..

4. Aufgabe.

Der Umsatz einer Firma war in der EU dreimal so hoch wie der in Asien, Amerika und Australien zusammen. Amerika brachte \$2 Mio mehr als Australien und Asien zusammen. Selbst wenn Asien um 150% zulegte, so schmölze der Vorsprung Amerikas auf Asien und Australien zusammen nur auf \$0.8 Mio. EU und Australien setzen das 15fache des asiatischen Marktes um.

Berechne die Umsätze in den genannten Regionen.

Lösung:

- Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x_{As} + 3x_{Am} + 3x_{Au} &= x_{EU}, \\ x_{Am} &= x_{Au} + x_{As} + 2, \\ 2.5x_{As} + x_{Au} + 0.8 &= x_{Am}, \\ x_{EU} + x_{Au} &= 15x_{As}, \end{aligned}$$

- lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2.5 & -1 & 1 & 0 \\ -15 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{As} \\ x_{Am} \\ x_{Au} \\ x_{EU} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -0.8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- $x_{As} = \$0.8$ Mio., $x_{Am} = \$2.97$ Mio., $x_{Au} = \$0.17$ Mio., $x_{EU} = \$11.8$ Mio..

Produktion:

- Rohstoffe A, B, Produkte X, Y,
- für 1 X werden benötigt: 1A und 2B,
  für 1 Y werden benötigt: 3A und 4B,
- Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

- andersherum

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Y \end{pmatrix},$$

  denn

$$M^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mehrstufige Produktion:

- Rohstoffe A, B, Zwischenprodukte C, D, Endprodukte X, Y,
- für 1 C werden benötigt: 1A und 2B, für 1 D werden benötigt: 3A und 4B,
- für 1 X werden benötigt: 5C und 6D, für 1 Y werden benötigt: 7C und 8D,
- Zusammenhänge

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$

- Kombination

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

- Umkehrung

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 50 & -22 \\ -43 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Übersicht

Spezielle Vektoren und Matrizen

Nullvektor:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

Nullmatrix:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Bemerkungen zum Nullvektor:

- der Nullvektor ist neutrales Element der Addition in $V = \mathbb{R}^n$, d. h. für alle $x \in V$ gilt

$$x + \mathcal{O} = \mathcal{O} + x = x.$$

Eigenschaften der Nullmatrix:

- es gelten

$$\begin{aligned} \mathcal{O} + A = A + \mathcal{O} = A \qquad & \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ \mathcal{O}_{m\times n} \cdot x = \mathcal{O}_m \qquad & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \\ A \cdot \mathcal{O}_n = \mathcal{O}_m \qquad & \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{aligned}$$

- aus $A \cdot x = \mathcal{O}$ folgt i. a. nicht $A = \mathcal{O}$ oder $x = \mathcal{O}$, beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Spezielle Vektoren und Matrizen

Einheitsvektoren:

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\,\text{te Zeile},$$

Einheitsmatrix:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- I steht für Identität,
- für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$I \cdot x = x,$$
- bei Verwechslungsgefahr die Dimension angegeben, also $I = I_{n \times n}$.

Definition 3.9

Seien $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ *Vektoren aus* V *und* $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)} \in \mathbb{R}$ *gegeben. Es wird*

$$\alpha^{(1)}x^{(1)} + \ldots + \alpha^{(k)}x^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} \alpha^{(j)}x^{(j)}$$

Linearkombination von $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ *mit den Skalaren* $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(l)}$ *genannt.*

Beispiel:

$$0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1.5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1 \\ -1.5 \end{pmatrix}.$$

Definition 3.10

Die Vektoren $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ *heißen* *linear abhängig*, *wenn es Skalare* $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}$ *gibt, die nicht alle gleich Null sind, so dass die Linearkombination verschwindet, d. h.*

$$\sum_{j=1}^{k} |\alpha^{(j)}| > 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{k} \alpha^{(j)} x^{(j)} = \mathcal{O}.$$

Andersherum heißen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ *linear unabhängig*, *falls*

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha^{(j)} x^{(j)} = \mathcal{O},$$

nur für $\alpha^{(1)} = \ldots \alpha^{(k)} = 0$ *gilt.*

Beispiele:

- die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  sind linear abhängig, denn

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- dabei sind aber x und y linear unabhängig, denn

$$\alpha^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  geht nur für $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$,
- auch sind jeweils x und z bzw. y und z lin. unabhängig.

Beispiele:

- die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  sind linear abhängig, denn

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- dabei sind aber x und y linear unabhängig, denn

$$\alpha^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  geht nur für $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$,
- auch sind jeweils x und z bzw. y und z lin. unabhängig.

Rang einer Matrix

Praktische Bestimmung, ob Vektoren linear unabhängig sind:

- Vektoren in einer Matrix zusammenfassen,
- Rang dieser Matix bestimmen.

Definition 3.11

Der Zeilenrang r einer $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist die Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A. Analog ist der Spaltenrang die Anzahl linear unabhängiger Spalten von A.

Satz 3.12

Der Zeilen- und der Spaltenrang einer $m \times n$-Matrix sind identisch und es wird allgemein $r =$ rang(A) der Rang einer Matrix genannt.

Bemerkung:

- für $A \neq \mathcal{O}$ gilt

$$1 \leq r \leq \min(m, n).$$

Systematische Berechung des Rangs:

- mittels Umformung von Gleichungen $Ax = 0$,
- Anzahl der übrig bleibenden Gleichung entspricht dem Rang.

Beispiel zur Berechnung des Ranges:

- Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ergibt sich aus $Ax = 0$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}$$

und damit

$$\begin{array}{lccccccc} (I) & 1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ (II) & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ \hline (I) & 1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ (II-4I) & 0x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \end{array}$$

und es bleiben zwei nicht-null-Gleichungen übrig, also $\text{rank}(A) = 2$.

Beispiel zur Berechnung des Ranges:

- Analog hätte die Analyse von A^T bei der Analyse von $A^T y = 0$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ergeben

$$\begin{array}{lcccccc}
(I) & 1y_1 & + & 4y_2 & = & 0 \\
(II) & 2y_1 & + & 5y_2 & = & 0 \\
(III) & 3y_1 & + & 6y_2 & = & 0 \\
\hline
(I) & 1y_1 & + & 4y_2 & = & 0 \\
(IV = II - 2I) & 0y_1 & - & 3y_2 & = & 0 \\
(V = III - 3I) & 0y_1 & - & 6y_2 & = & 0 \\
\hline
(I) & 1y_1 & + & 4y_2 & = & 0 \\
(IV) & 0y_1 & - & 3y_2 & = & 0 \\
(V - 2IV) & 0y_1 & + & 0y_2 & = & 0
\end{array}$$

ebenso bleiben zwei nicht-null-Gleichungen übrig, also $\text{rank}(A^T) = 2$.

Definition 3.13

Sei $S = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\} \subseteq V$ ein System von Vektoren. Die lineare Hülle

$$\operatorname{span}(S) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha^{(j)} x^{(j)}, \text{ für } k \in \mathbb{N},\ \alpha^{(j)} \in K,\ x^{(j)} \in S, \quad j = 1, \ldots, k \right\}$$

von S ist die Menge aller möglichen Linearkombinationen von Vektoren aus S (Skalare beliebig aus K, meist $K = \mathbb{R}$).

Bemerkung:

- wenn $\operatorname{span}(S) = V$, so sagen wir, dass S den Vektorraum V generiert.

Definition 3.14

Ein System $S \subseteq V$ heißt Basis von V, wenn es linear unabhängig ist und den ganzen Raum V generiert.

Satz 3.15

Jeder lineare Raum hat eine Basis.

Bemerkung:

- Jede zwei Basen von V haben die gleiche Mächtigkeit (Anzahl an Basiselementen).

Definition 3.16

Die Dimension $\dim(V)$ eines Vektorraums V ist die Anzahl an Elementen die eine Basis von V hat.

<u>Beispiel</u>:

- Einheitsvektoren $\{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\} = S \subset \mathbb{R}^n$ bilden Basis des $\mathbb{R}^n$.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha^{(j)} e^{(j)} = \mathcal{O} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha^{(n)} \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

$\Rightarrow$ alle $\alpha^{(j)}$ sind Null $\quad\Rightarrow\quad \left\{e^{(j)};\ j = 1, \ldots, n\right\}$ linear unabhängig,

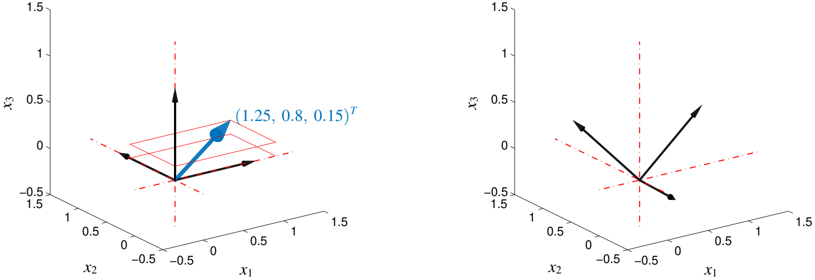
- weiter ist

$$\operatorname{span}\left\{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\right\} = \left\{\sum \alpha^{(j)} e^{(j)}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha^{(n)} \end{pmatrix},\ \alpha^{(j)} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^n$$

somit generieren $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}$ den Vektorraum V und $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

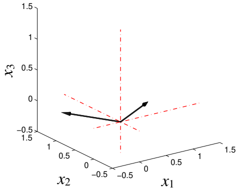
Bemerkung:

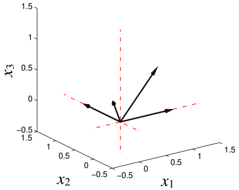
- in der Einheitsbasis im $\mathbb{R}^3$ kann jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ eindeutig dargestellt werden,
- dies geht auch in vielen anderen Systemen von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$,

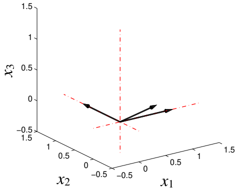


Bemerkung:

- in der Einheitsbasis im $\mathbb{R}^3$ kann jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ eindeutig dargestellt werden,
- dies geht auch in vielen anderen Systemen von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$,
- es geht jedoch nicht (zumindest nicht immer bzw. nicht eindeutig), wenn zu wenige, zu viele oder 3 abhängige Vektoren im System sind







Mögliche andere Basen für $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}, \quad S_3 = \left\{ -e^{(1)}, -e^{(2)}, -e^{(3)} \right\}.$$

- Basisdarstellung von $x = (1,2,3)^T$ durch S_1 ist $\alpha = (-1,-1,3)^T$, denn

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

- Basisdarstellung von $x = (1,2,3)^T$ durch S_2 ist $\alpha = (0,1,2)^T$, denn

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

- Basisdarstellung von $x = (1,2,3)^T$ durch S_3 ist $\alpha = (-1,-2,-3)^T$.

Übersicht

Definition 3.17

Lineare Abbildungen L *sind Funktionen zwischen linearen Räumen* V *und* W *über* $\mathbb{K}$*, für welche*

$$\begin{aligned} L(u+v) &= L(u) + L(v) \qquad \forall u, v \in V, \\ L(\alpha v) &= \alpha L(v), \qquad \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

gilt.

Ist L *eine lineare Abbildung in den Grundkörper (also* $W = \mathbb{K}$*), so wird* L *ein lineares Funktional genannt.*

Einfache Beispiele (Funktionale):

- Projektion auf eine Komponente ($V = \mathbb{R}^n$),
- Summe der Komponenten ($V = \mathbb{R}^n$),
- Integral ($V = L_2([-1, 1])$),
- Skalarprodukt mit $\cos(\pi x/2)$ ($V = L_2([-1, 1])$).

Bemerkungen:

- lineare Abbildung erhalten die Linearkombinationen, d. h.

$$L\left(\sum_{l=1}^{k} \alpha^{(l)} v^{(l)}\right) = \sum_{l=1}^{k} \alpha^{(l)} L(v^{(l)}),$$

- bei linearen Abbildungen werden gewöhnlich die Klammern weggelassen

$$Lv = L(v).$$

Repräsentationssatz:

- Jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist als Matrixmultiplikation mit einer Abbildungsmatrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ darstellbar,
- die Abbildungsmatrix hängt von den gewählten Basen in beiden Räumen ab,
- meistens wählen wir die Einheitsbasen.

Beispiele:

- Summe der Komponente eines Vektors ($V = \mathbb{R}^n$)

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad Lx = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad M = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{1\times n},$$

- Rotation eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ um Winkel α um den Ursprung

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

- Rotation eines Vektors im $\mathbb{R}^3$ um Winkel α um die x_3-Achse

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 3.18

Die Menge aller Vektoren $v \in V$ für die $Lv = 0$ gilt, wird als Kern,

$$\ker(L) = \{v \in V \ : \ Lv = \mathcal{O}\},$$

von L und ihrer Abbildungsmatrix M bezeichnet.

Kern einer Matrix:

- lineare Abbildung mittels einer Matrix M dargestellt als

$$y = Mx,$$

- Kern der Matrix (führt mittels Basis auf den Kern der zugehörigen Abbildung)

$$\ker(M) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Mx = \mathcal{O}\}.$$

Übersicht

Verallgemeinerte Lösungen:

- das LGS $Ax = b$ ist genau dann für alle $b \in \mathbb{R}^m$ eindeutig lösbar, wenn $m = n$ und $\operatorname{rank}(A) = n$,
- falls $m \neq n$ oder $\operatorname{rank}(A) < \min(m, n)$, so gibt es zwei Fälle
  a) weniger Gleichungen als Variablen und keine Widersprüche
     $\rightarrow$ unterbestimmtes lineares Gleichungssystem,
  b) Widersprüche (z.B. mehr unabhängige Gleichungen als Variablen)
     $\rightarrow$ überbestimmtes lineares Gleichungssystem.

Fall a) (unterbestimmtes Gleichungssystem):

- tritt ein, wenn $n > m$ (ggf. nach Streichung abhängiger Zeilen),
- es gibt also mehr Unbekannte als Gleichungen, aber keine Widersprüche,
- das LGS ist lösbar, aber nicht eindeutig, die Lösungsmenge ist

$$M = x_0 + \ker(A) = \{x : \; x = x_0 + \xi, \xi \in \ker(A)\}$$

mit

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = \mathcal{O}\},$$

- für $x_0 = \mathcal{O}$ ist M ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$,
- für $x_0 \neq \mathcal{O}$ ist M ein affiner Raum.

Fall b) (überbestimmtes Gleichungssystem):

- die Lösungsmenge ist leer,
- Übergang zu linearen Ausgleichsproblemen.

Beispiel 28

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -3. \end{aligned}$$

Gauß-Algorithmus ergibt (II-I)

$$-x_2 - x_3 = -2$$

freie Parameterwahl

$$\begin{aligned} x_3 &= \alpha \\ \Rightarrow x_2 &= 2 - x_3 = 2 - \alpha \\ \Rightarrow x_1 &= 1 - x_2 - x_3 \\ &= 1 - (2 - \alpha) - \alpha \\ &= -1. \end{aligned}$$

Beispiel 28 (Fortsetzung)

Allgemeine Lösung:

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_0} + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\ker(A)}.$$

Lösungsmenge:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiel 28 (Fortsetzung)

Bemerkungen:

- *es gelten* $Ax_0 = b$ *sowie*

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \ker(A)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- *dies führt auf*

$$A \cdot \left(\underbrace{x_0 + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{allg. Lösung } x} \right) = Ax_0 + \alpha A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = b + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b.$$

Beispiel 29

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung ist

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_0} + \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\ker(A)}.$$

Lösungsmenge:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 - \beta \\ 1 - \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiel 29 (Fortsetzung)

Bemerkungen:

- *wieder gelten* $Ax_0 = b$ *sowie*

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- *damit ist*

$$\begin{aligned} Ax = A\left(x_0 + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= Ax_0 + \alpha A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= b + \mathcal{O} + \mathcal{O} \\ &= b. \end{aligned}$$

Unterbestimmte Systeme

Nichtnegativitätsrestriktionen:

- nur nichtnegative Lösungen ($x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$) sind gesucht,
- etwa für Stückzahlen, Rohstoffmengen oder Ausgaben,
- u.U. Beschränkung der freien Parameter.

Beispiel 30

Drei Positionen im Ausgabenplan, einzuhalten ist

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \textit{(in Mrd. €)}$$

Das System ist unterbestimmt, denn $3 = n > m = 2$. *Als Lösung ergibt sich*

$$\lambda = x_3, \quad x_2 = 2\lambda, \quad x_1 = 10 - 5\lambda, \qquad \textit{dabei ist} \qquad \ker(A) = \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 30 (Fortsetzung – allgemeine Lösung & nichtnegative Lösungen)

Allgemeine Lösung ist

$$x = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beachtung von Nichtnegativitätsrestriktionen (Ausgaben):

- $x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq 0$,
- $x_1 = 10 - 5\lambda \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \leq 2$,
- x_2 *liefert keine weitere Einschränkung.*

Lösungsmenge mit nichtnegativen Ausgaben ist

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 10 - 5\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \alpha \in [0, 2] \right\}.$$

Spezielle Lösungen:

- ist die Lösung nicht eindeutig, so kann nach speziellen Lösungen gesucht werden,
- freie Parameter so wählen, dass bestimmte Kriterien erfüllt sind,
- etwa minimale Kosten, minimaler Aufwand, maximaler Gewinn, ...
- Übergang zur Optimierung.

Wir betrachten das vorherige Beispiel:

- Lösungsmenge für nichtnegativen Ausgaben

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 10 - 5\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in [0,2] \right\},$$

- $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (10,0,0)^T$,
- $\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad x = (0,4,2)^T$,
- Summe der Ausgaben $x_1 + x_2 + x_3$ ist für die zweite Lösung offenbar kleiner als für die erste, sie ist vorzuziehen.

Unterbestimmte Systeme

<u>Spezielle Lösungen:</u>

- ist die Lösung nicht eindeutig, so kann nach speziellen Lösungen gesucht werden,
- freie Parameter so wählen, dass bestimmte Kriterien erfüllt sind,
- etwa minimale Kosten, minimaler Aufwand, maximaler Gewinn, ...
- Übergang zur Optimierung.

<u>Wir betrachten das vorherige Beispiel:</u>

- Lösungsmenge für nichtnegativen Ausgaben

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 10 - 5\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in [0, 2] \right\},$$

- $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (10, 0, 0)^T$,
- $\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad x = (0, 4, 2)^T$,
- Summe der Ausgaben $x_1 + x_2 + x_3$ ist für die zweite Lösung offenbar kleiner als für die erste, sie ist vorzuziehen.

<u>Lösung mit geringsten Ausgaben:</u>

- Ausgaben in Abhängigkeit von λ sind

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 - 5\lambda + 2\lambda + \lambda \\ &= 10 - 2\lambda \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{aligned}$$

- es gibt keine beste Lösung des unterbestimmten LGS,
- x_i sind Ausgaben (also nichtnegativ), daher nur $\lambda \in [0, 2]$ betrachten,
- bester Wert für $\lambda = 2$, es gilt dann $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$.

Beispiel 31 (LGS mit zweiparametriger Lösung)

LGS & Gauß:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\
\hline
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\
 & - & 2x_2 & & & & & = & -4 \\
\hline
\end{array}$$

Lösung:

- $x_2 = 2, \quad x_3 = \lambda_1, \quad x_4 = \lambda_2, \quad x_1 = 8 - \lambda_1 - \lambda_2,$ *also*

$$x = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überbestimmte Systeme

Überbestimmtes Gleichungssystem:

- LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
- tritt ein, wenn $n < m$ (auch nach Streichung eventuell abhängiger Zeilen),
- es gibt also mehr Gleichungen als Unbekannte und damit Widersprüche, also

$$\operatorname{rank}(A|b) > \operatorname{rank}(A),$$

- die Lösungsmenge ist leer (ergibt sich z.B. beim Gaußalgorithmus),
- Näherungslösung gesucht, sodass $Ax \approx b \rightarrow$ lineare Ausgleichsprobleme,
- einfacher Anwendungsfall: Bestimmung einer Regressionsgeraden.

Überbestimmte Systeme

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{array}{lcccccc}
I & x & + & y & = & 2 \\
II & x & - & y & = & 2 \\
III & 3x & + & y & = & 3 \\
\hline
II - I & & - & 2y & = 0 & \\
III - 3 \cdot I & & - & 2y & = -3 &
\end{array}$$

Widerspruch - Lösungsmenge ist leer!

Überbestimmte Systeme

Eigentliches Ziel bei einem linearen Gleichungssystem:

- für jede Gleichung $i = 1, \ldots, m$ soll gelten

$$(Ax)_i = b_i,$$

- überbestimmt: es ist nicht möglich, alle Gleichungen gleichzeitig zu erfüllen.

Ausgleichsproblem:

- Ziel für jede Gleichung

$$(Ax)_i \approx b_i$$

  in einem gewissen Sinne,

- Quadrate-Abstände minimieren (kleinste Fehlerquadrate), also

$$\sum_{i=1}^{m} \big((Ax)_i - b_i\big)^2 = \big\|Ax - b\big\|^2 \to \min!$$

Definition 3.19

Eine Lösung x^* heißt eine verallgemeinerte Lösung (oder auch kleinste Quadrate-Lösung) des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wenn

$$\|Ax^* - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|.$$

Der Fehler wird also im Sinne der euklidischen Norm minimal.

Bemerkung: Gilt $Ax = b$, so wird x eine klassische Lösung genannt.

Überbestimmte Systeme

Bestimmung der verallgemeinerten Lösung:

- Zielfunktion ist (kleinste Fehlerquadrate)

$$f(x) = \|Ax - b\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (A_i x - b_i)^2,$$

- notwendige Bedingungen sind

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 2 \sum_{i=1}^{m} (A_i x - b) A_i = \mathcal{O},$$

- somit ist $\nabla f = 0 \;\Leftrightarrow\; A^T(Ax - b) = 0.$

Überbestimmte Systeme

Gaußsche Normalengleichung:

- fasst notwendige Bedingungen für das Vorliegen eines Minimums zusammen

$$A^T Ax = A^T b.$$

Bemerkungen:

- es entsteht ein quadratisches $(n \times n)$ LGS,
- ist $\operatorname{rank}(A) = n$, so gibt es genau eine kleinste Quadrate-Lösung,
- ist $\operatorname{rank}(A) < n$, so gibt es einen linearen Raum kleinster Quadrate-Lösung (mglw. Lösung kleinster Norm bestimmen).

Beispiel 32

Folgende Wirtschaftsdaten seien gegeben:

t	0	1	3
y	3	5	10

Das Wachstum ist annähernd linear. Wir setzen also eine Gleichung der Form $y = x_1 t + x_2$ an. Gesucht ist der Anstieg x_1 pro Jahr und das Absolutglied x_2.

Überbestimmte Systeme

Beispiel 32

Folgende Wirtschaftsdaten seien gegeben:

t	0	1	3
y	3	5	10

Das Wachstum ist annähernd linear. Wir setzen also eine Gleichung der Form $y = x_1 t + x_2$ an. Gesucht ist der Anstieg x_1 pro Jahr und das Absolutglied x_2.

Es entsteht das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} t_1 x_1 + x_2 &= y_1 \\ t_2 x_1 + x_2 &= y_2 \\ t_3 x_1 + x_2 &= y_3 \end{aligned}$$

Bei zwei Datenpaaren entsteht folgendes LGS:

$$\left.\begin{aligned} t_1 x_1 + x_2 &= y_1 \\ t_2 x_1 + x_2 &= y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_1 = \frac{y_1 - y_2}{t_1 - t_2}, \quad x_2 = \frac{t_1 y_2 - t_2 y_1}{t_1 - t_2}$$

Für $t_1 \neq t_2$ ergeben sich x_1 und x_2 eindeutig aus den ersten beiden Gleichungen.

Beispiel 32

Folgende Wirtschaftsdaten seien gegeben:

t	0	1	3
y	3	5	10

Das Wachstum ist annähernd linear. Wir setzen also eine Gleichung der Form $y = x_1 t + x_2$ an. Gesucht ist der Anstieg x_1 pro Jahr und das Absolutglied x_2.

Aber x_1 und x_2 ergeben sich auch aus der ersten und dritten Gleichung eindeutig $\Rightarrow$ drei Datenpaare, die sich i. a. widersprechen.

Kleinste-Quadrate-Lösung für:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

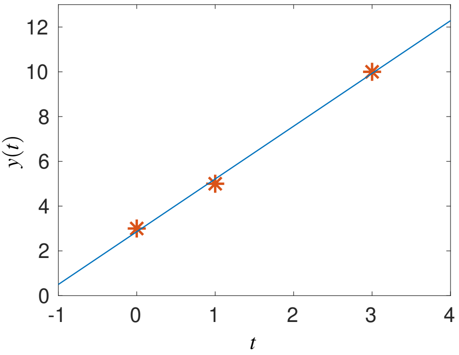
Normalengleichung:

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$x = (2.3571, 2.8571)^T$$

Graphische Darstellung des Regressionsproblems:



Aufgabe 20090216A5.
Die Domino-Bankengruppe analysiert die Geschäftszahlen für die letzten 6 Monate:
$[225, 230, 230, 200, 160, 110]$.
Berechnen Sie a) eine lineare und b) eine quadratische Funktion, die die Daten im Sinne der kleinsten Quadrate approximiert.
c) Bestimmen Sie jeweils den Nulldurchgang.

Aufgabe 20090216A5.
Die Domino-Bankengruppe analysiert die Geschäftszahlen für die letzten 6 Monate:
$[225, 230, 230, 200, 160, 110]$.
Berechnen Sie a) eine lineare und b) eine quadratische Funktion, die die Daten im Sinne der kleinsten Quadrate approximiert.
c) Bestimmen Sie jeweils den Nulldurchgang.

Lösung zu b):

- LGS zum Ansatz $y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2$ (für a) würde es $y_i = a_0 + a_1 x_i$ sein) sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 \\ 230 \\ 230 \\ 200 \\ 160 \\ 110 \end{pmatrix},$$

- Normalengleichung

$$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1056 \\ 1985 \\ 5785 \end{pmatrix}$$

- Lösung ist

$$\begin{pmatrix} 214.21 \\ 45.61 \\ -16.61 \end{pmatrix}.$$

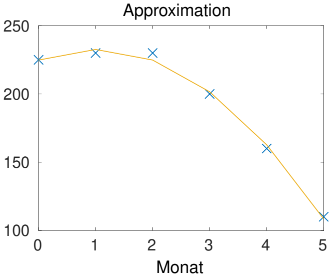
Aufgabe 20090216A5.
Die Domino-Bankengruppe analysiert die Geschäftszahlen für die letzten 6 Monate:
$[225, 230, 230, 200, 160, 110]$.
Berechnen Sie a) eine lineare und b) eine quadratische Funktion, die die Daten im Sinne der kleinsten Quadrate approximiert.
c) Bestimmen Sie jeweils den Nulldurchgang.

Lösung zu b):

- Optimales Polynom 2. Grades ist

$$y(x) = 214.21 + 45.61x - 16.61x^2.$$

- graphische Darstellung zum Regressionsproblem



Beispiel 33

Die Intensität illegaler Investitionen (IiI) wächst kontinuierlich, die Zahlen der letzten vier Jahre sind:

Jahr	15	16	17	18
IiI	82	86	96	112

Setzen Sie quadratisches Wachstum an und geben Sie eine Prognose für '19!

Beispiel 33

Die Intensität illegaler Investitionen (IiI) wächst kontinuierlich, die Zahlen der letzten vier Jahre sind:

Jahr	15	16	17	18
IiI	82	86	96	112

Setzen Sie quadratisches Wachstum an und geben Sie eine Prognose für '19!

Lösung:

- *Es entsteht das lineare Ausgleichproblem* $Ax = b$ *mit*

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 15^2 \\ 1 & 16 & 16^2 \\ 1 & 17 & 17^2 \\ 1 & 18 & 18^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 86 \\ 96 \\ 112 \end{pmatrix}$$

- *die Normalengleichung lautet*

$$\begin{pmatrix} 4 & 66 & 1094 \\ 66 & 1094 & 18216 \\ 1094 & 18216 & 304658 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 376 \\ 6254 \\ 104498 \end{pmatrix}$$

- *Lösung* $a = (742,\ -89,\ 3)^T$, *Funktion* $f(t) = 742 - 89t + 3t^2$,
- *Prognose für '19 ist* $f(19) = 134$.

Qual der Wahl:

- bei lösbaren unterbestimmten linearen Gleichungssystemen,
- unendlich viele Lösungen in Abhängigkeit von den freien Parametern,
- Anzahl freie Parameter = Anzahl Unbekannte - Rang der Systemmatrix.

Welche Parameter sollen wir setzen?

Standardantwort:

- Minimiere die l_2–Norm der Lösung,
  vgl. Abschnitt *Über- und unterbestimmte Systeme*.

Lineare Zielfunktion – lineare Optimierung

Angepasste Antwort:

- lineares Auswahlkriterium, abhängig von der konkreten Anwendung,
- etwa minimale Kosten oder maximaler Gewinn.

Aufgabentyp:

- lineares Optimierungsproblem,
- Zielfunktion
$$f(x) = c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
soll maximiert bzw. minimiert werden,
- unter den Nebenbedingungen
$$Ax = b, \qquad x \geq 0,$$
- mglw. auch unter den Nebenbedingungen
$$Ax \leq b, \qquad x \geq 0.$$

Allgemeine Tipps zur Lösung:

- 2D-Probleme sind grafisch lösbar,
- niedrigdimensionale Probleme sind Gauß-ähnlich lösbar (Florida–Method, d.h. per Hand),
- für große Probleme Simplex-Algorithmus nutzen, implementiert in CAS-Programmpaketen.

Grafische Lösung:

- nur für $x \in \mathbb{R}^2$ möglich (für $x \in \mathbb{R}^3$ unhandlich),
- zulässiger Bereich wird festgelegt und eingezeichnet,
- Zielfunktion beschreibt Gerade $mx + n$ mit Variable n,
- grafische Maximierung bzw. Minimierung durch Verschieben,
- Überführung in Standardform nicht nötig.

Beispiel 34 (Grafische Lösung)

Für zwei Produktmengen $x_1 \geq 0$ *und* $x_2 \geq 0$ *gelten die Bedingungen*

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \end{array}$$

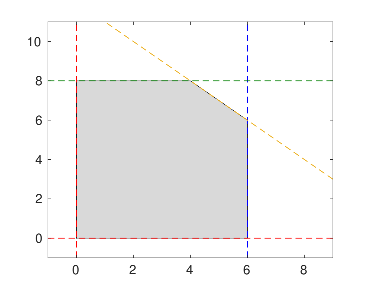
und es wird die Lösung mit maximalem Gewinn $f(x) = 8x_1 + 3x_2$ *gesucht.*

Beispiel 34 (Grafische Lösung)

Für zwei Produktmengen $x_1 \geq 0$ *und* $x_2 \geq 0$ *gelten die Bedingungen*

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 12\,. \end{array}$$

und es wird die Lösung mit maximalem Gewinn $f(x) = 8x_1 + 3x_2$ *gesucht.*



Beispiel 34 (Grafische Lösung)

Für zwei Produktmengen $x_1 \geq 0$ *und* $x_2 \geq 0$ *gelten die Bedingungen*

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 12\,. \end{array}$$

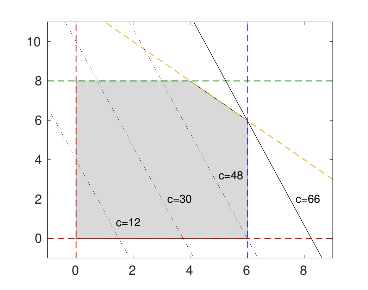
und es wird die Lösung mit maximalem Gewinn $f(x) = 8x_1 + 3x_2$ *gesucht.*

$$8x + 3y \to \max$$

$$8x + 3y = c \to \max$$

$$y = \frac{c}{3} - \frac{8}{3}x, \quad c \to \max!$$

optimale Lsg.: $x = 6,\ y = 6,\ c = 66.$



Definition 3.20

Die Standardform eines linearen Optimierungsproblem ist

$$Ax = b, \qquad x \geq 0, \qquad c^T x \to \min!$$

Überführen in Standardform eines LOP:

- falls das LOP die Form hat

$$c^T x \to \min, \qquad Ax \leq b,\ x \geq 0$$

- Schlupfvariablen $u_i = x_{n+i}$ (u_i ist der Rest von Ressource i) einführen
  $\rightsquigarrow$ aus Ungleichungen werden Gleichungen.

Bestimmung einer optimalen Lösung für die Standardform:

- Simplex-Algorithmus.

Beispiel 35 (Umformung eines LOPs in Standardform)

Das Problem

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 10 \\ & & x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & \to & \max \end{array}$$

lautet in Standardform

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 10 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 16 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$-5x_1 - 3x_2 \to \min$$

Idee:

- zulässiger Bereich ist ein Polytop (also konvex),
- Optimum wird (u.a.) in einer Ecke des zulässigen angenommen,
- entsprechende Kombination aus Basisvariablen finden.

Basis- und Nichtbasisvariablen (für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \leq n$):

- Unterteilung der n Variablen in m BV und $n - m$ NBV,
- NBV auf null, zulässige Basislösung mit den BV $\rightarrow$ Ecke des zul. Bereichs.

Verfahren:

- Bestimmung einer zulässigen Lösung,
- Iterarion durch Tausch einer BV gegen eine NBV
  (im Sinne des zulässigen Bereichs werden benachbarte Ecken durchlaufen),
- Funktionswert verschlechtert sich pro Iteration nicht
  $\rightarrow$ stop nach endlich vielen Schritten,
- oft wird mit den Schlupfvariablen als BV gestartet.

Beispiel 36

Produktion:

- $n = 3$ *verschiedene Produkte herstellen,*
- *unter Verwendung von* $m = 4$ *Produktionsmitteln,*
- *Produktionsmittel nur beschränkt verfügbar*

Verbrauch / Grenzen:

Produktionsmittel	Produkt			Kapazität
	1	2	3	
1	1	3	2	30
2	4	2	1	25
3	3	4	4	45
4	2	3	5	50

Gewinne je Produkteinheit: 5, 8, 4.

Aufgabe:

- *Gesucht sind Produktionsmengen mit maximalem Gewinn.*

Beispiel 36

Mathematische Formulierung:

- *Zielfunktion*

$$f(x) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 \to \max$$

- *unter den Nebenbedingungen*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 30 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 45 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

- *kanonische Form (Standardform eines LOP)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 45 \\ 50 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = (5,\ 8,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)x \to \max$$

Beispiel 36

Mathematische Formulierung:

- *Zielfunktion*

$$f(x) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 \to \max$$

- *unter den Nebenbedingungen*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 30 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\le 45 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\le 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

- *kanonische Form (Standardform eines LOP)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 45 \\ 50 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = (5,\ 8,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)x \to \max$$

1,00	3,00	2,00	1,00	0,00	0,00	0,00	30,00	10,00
4,00	2,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	25,00	12,50
3,00	4,00	4,00	0,00	0,00	1,00	0,00	45,00	11,25
2,00	3,00	5,00	0,00	0,00	0,00	1,00	50,00	16,67
5,00	8,00	4,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

0,33	1,00	0,67	0,33	0,00	0,00	0,00	10,00	30,00
3,33	0,00	-0,33	-0,67	1,00	0,00	0,00	5,00	1,50
1,67	0,00	1,33	-1,33	0,00	1,00	0,00	5,00	3,00
1,00	0,00	3,00	-1,00	0,00	0,00	1,00	20,00	20,00
2,33	0,00	-1,33	-2,67	0,00	0,00	0,00	-80,00	

0,00	1,00	0,70	0,40	-0,10	0,00	0,00	9,50
1,00	0,00	-0,10	-0,20	0,30	0,00	0,00	1,50
0,00	0,00	1,50	-1,00	-0,50	1,00	0,00	2,50
0,00	0,00	3,10	-0,80	-0,30	0,00	1,00	18,50
0,00	0,00	-1,10	-2,20	-0,70	0,00	0,00	-83,50

Bemerkungen:

- Basisvariablen – wo Einheitsmatrix steht, hier zu Beginn Spalten 4-7,
- Nichtbasisvariable – alle anderen, sind immer gleich 0,
- rechte Seite = Werte der Basisvariablen,
- bei NBV stehen nichttriviale Preise, bei BV sind c-Werte=0,
- Simplexschritt: eine NBV wird BV, dafür fliegt eine BV heraus,
- Auswahl der neuen BV: aktuelle NBV mit größtem c-Wert (hier im 1. Schritt x_2),
- Auswahl der zu killenden BV: diejenige, für die zuerst eine Ressource ausgeht,
- Rechnung: Gauß-Schritte, um bei neuer BV eine Eins und sonst Nullen zu erzeugen,
- Maximalwert = minus letzter Eintrag in letzter Zeile.

Übersicht

Literatur

- Dörsam, P.: Mathematik anschaulich dargestellt für Studierende der Wirtschaftswissenschaften. 2014, PD-Verlag, Heidenau.
- Luderer, B. / Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. 2000, Teubner B.G. Verlag, Stuttgart.
- Mosler, K. / Dyckerhoff, R. / Scheicher, C.: Mathematische Methoden für Ökonomen. 2011, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- Opitz, O. / Etschberger, S. / Burkart, W. R. / Klein, R.: Mathematik - Lehrbuch für das Studium der Wirtschaftswissenschaften. 2017, Walter de Gruyter Verlag, Berlin/Boston.
- Schmidt, K. D.: Mathematik - Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler. 2000, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- Sydsæter, K. / Hammond, P. / Strøm, A. / Carvajal, A.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftlicher. 2018, Pearson, Hallbergmoos.
- Terveer, I.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftlen. 2013, UVK Verlagsgesellschaft, Konstanz.