

3. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Aufgabe 8:

Die Folge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  wird mittels der Rekursion

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$$

und den Anfangswerten  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 10$  definiert.

Bestimmen Sie zu der Rekursion die charakteristische Gleichung, lösen Sie diese, geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift für  $a_n$  an und berechnen Sie  $a_{20}$ .

Aufgabe 9:

Bei einer halbjährigen Aufnahmeprüfung nehmen neben den jeweils 300 neuen Kandidaten erfahrungsgemäß 30% der Teilnehmer vom letzten Mal sowie 12% der Kandidaten vom vorletzten Mal teil. Beim ersten Test gibt es keine Wiederholer, beim zweiten nur einfache Wiederholer.

Bestimmen Sie die Rekursionsvorschrift. Berechnen Sie zudem den Grenzwert der Folge indem Sie die stabile Anzahl der Teilnehmer (Fixpunkt) berechnen.

Aufgabe 10:

In der Vorlesung wurde mittels Parametern  $a, b, c, d > 0$  und der Folge

$$x_{n+1} = c + \frac{ad}{b} - \frac{d}{b}x_n = \alpha + \beta x_n$$

mit  $x_n$  der Produktionsmenge in Zyklus  $n$  ein Marktmodell vereinfacht modelliert.

Unter welchen Bedingungen an den Parameter  $\beta$  ergibt sich eine stabile Entwicklung? Nutzen Sie dazu die Gleichgewichtsmenge  $x^* = \alpha/(1 - \beta)$  und betrachten Sie  $|x_n - x^*|$ , also die Abweichung der Iterierten  $x_n$  vom Gleichgewicht. Leiten Sie unter Verwendung auf  $|x_n - x^*|$  eine Formel für  $|x_{n+1} - x^*|$  her.

Zusatzaufgabe 2:

Erstellen Sie eine Tabellenkalkulation zu der rekursiven Folge aus Aufgabe 8 und vergleichen Sie die Werte für  $a_{20}$ .

Aufgaben zum Selbststudium & zusätzlichen Üben zur 3. Übung

Übungsaufgabe 7:

Die Folge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  wird mittels der Rekursion

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$$

und den Anfangswerten  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$  definiert.

Bestimmen Sie zu der Rekursion die charakteristische Gleichung, lösen Sie diese, geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift für  $a_n$  an und berechnen Sie  $a_{50}$ .

Übungsaufgabe 8:

Britta legt Geld an. Die Bank bietet ihr 3% Zinsen für das aktuelle Kapital sowie einen Bonus von 5% auf das Kapital vom vorangegangenen Jahr. Den Bonus gibt es im ersten Jahr natürlich noch nicht.

Stellen Sie eine rekursive Formel für Brittas Kapital  $a_n$  im Jahr  $n$  auf. Wieviel hat sie nach 5 Jahren, wenn Sie mit  $a_0 = 10\,000$  € startet?

Übungsaufgabe 9:

Hans-Georg überwacht Verdächtige in Massen. Pro Woche ergeben sich durch Informationen der zuletzt überwachten Personen Neuverdächtigungen im Umfang von 1% der zuletzt überwachten Leute. Für 0.5% der vor zwei Wochen Überwachten stellt sich die Maßnahme als nicht weiter nötig heraus. Pro Woche führen externe Informationen zudem zu 100 zusätzlichen Neuverdächtigungen.

Geben sie eine Rekursionsvorschrift für die Anzahl  $a_n$  der zu überwachenden Personen in Woche  $n$  an und bestimmen Sie  $a_2, \dots, a_4$  für  $a_0 = 10\,000$  und  $a_1 = 10\,200$ .

Übungsaufgabe 10:

Geben Sie für folgenden Reihen die Grenzwerte für  $n \rightarrow \infty$  an, falls sie existieren

$$(a) \quad s_n = \sum_{i=0}^n 0.1^i, \quad (b) \quad s_n = \sum_{i=0}^n 1.5^i.$$

Zusatzaufgabe 3:

Erstellen Sie eine Tabellenkalkulation zum Modell der zweistufigen Rückkopplung (Cobweb-Modell)

$$K_{n+1} = k^* + a \cdot (K_n - k^*) + b \cdot (K_n - K_{n-1})$$

mit den Anfangswerten  $K_0 = -10\,000$  und  $K_1 = -11\,000$  sowie den Parametern  $k^* = -8\,000$ ,  $a = 0.95$ ,  $b = 1.02$ . Berechnen Sie die Werte  $K_n$  für  $n = 2, \dots, 90$ .