

13. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Aufgabe 45:

- (a) Geben Sie drei verschiedene Basen von \mathbb{R}^3 an.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3 \text{ und } x_2 = -x_4\}$. Welche Dimension hat V ?
- (c) Welche Dimension hat der Vektorraum $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_4\}$?
- (d) Geben Sie die lineare Hülle von

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

sowie eine möglichst einfache andere Basis an.

Aufgabe 46:

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ist das System über- oder unterbestimmt?

Aufgabe 47:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 48:

Bestimmen Sie die Ränge der Matrizen aus den Aufgaben 46 und 47. Geben Sie zudem jeweils den Kern der Systemmatrix an.

Aufgabe 49:

- (a) Wie ändern sich in den Aufgaben 46 und 47 die Lösungsmengen, wenn zusätzlich die Restriktionen $x \geq 0$ zu beachten sind?
- (b) Bestimmen Sie zusätzlich die Lösungen mit nichtnegativen Einträgen und minimalen Kosten

$$\sum_{i=1}^3 x_i \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^4 x_i.$$

Die Aufgaben sollen sowohl zur Bearbeitung in den Seminaren als auch zur selbstständigen Übung dienen. Insbesondere reichen die 90 Minuten einer Übung oft nicht zur Besprechung und Bearbeitung aller Aufgaben.

Aufgaben zum Selbststudium & zusätzlichen Üben zur 13. Übung

Übungsaufgabe 45:

- (a) Geben Sie drei verschiedene Basen von \mathbb{R}^4 an.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 = 2x_2 \text{ und } x_3 = -2x_4\}$. Welche Dimension hat V ?
- (c) Welche Dimension hat der Vektorraum $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_4\}$?
- (d) Geben Sie die lineare Hülle von

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

sowie eine möglichst einfache andere Basis an.

Übungsaufgabe 46:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgabe 47:

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Ist das System über- oder unterbestimmt?

Übungsaufgabe 48:

Bestimmen Sie die Ränge der Matrizen aus den Aufgaben 46 und 47. Geben Sie zudem jeweils den Kern der Systemmatrix an.

Übungsaufgabe 49:

- (a) Wie ändern sich in den Aufgaben 46 und 47 die Lösungsmengen, wenn zusätzlich die Restriktionen $x \geq 0$ zu beachten sind?
- (b) Bestimmen Sie zusätzlich die Lösungen mit nichtnegativen Einträgen und minimalen Kosten

$$\sum_{i=1}^3 x_i \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^4 x_i.$$