

3. Übung zur Vorlesung „Mathematische Methoden in den Wirtschaftswissenschaften“

Aufgabe 11:

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'(x) &= -\sin(x)y(x), \quad x \in [0, 10], \\y(0) &= \mathbf{e}.\end{aligned}$$

- Berechnen Sie drei Iterationen mit dem Euler-Verfahren zu  $h = 1/3$ .
- Berechnen Sie einen Schritt mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zu  $h = 1$ .
- Berechnen Sie die Abweichungen zur analytischen Lösung  $y(x) = \exp(\cos(x))$ .

Aufgabe 12:

Das Abelson Modell befasst sich mit der Meinungsbildung einer Gruppe von  $n \geq 2$  Menschen. Der einfache Fall eines Paares führt auf

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= a(y - x), \\ \dot{y}(t) &= b(x - y)\end{aligned}$$

mit  $x$ , und  $y$  Werten für die Meinungen und  $a, b \geq 0$ ,  $a + b > 0$ . Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 + C_2 \exp(-(a + b)t), \\ y(t) &= C_1 - C_2 \frac{b}{a} \exp(-(a + b)t)\end{aligned}$$

mit  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  die Differentialgleichung löst.

Aufgabe 13:

Berechnen Sie die Determinanten von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1.5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1.5 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Welche der drei Matrizen sind invertierbar?

Aufgabe 14:

Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen  $A$  und  $C$  aus Aufgabe 13.

Aufgabe 15:

Wir betrachten ein stark vereinfachtes Modell zur demographischen Entwicklung unter Berücksichtigung von nur 2 Klassen: Arbeiter und Rentner. Das Modell lautet

$$\begin{pmatrix} A_{k+1} \\ R_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b - r & 0 \\ r & 1 - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie stabile Relationen zwischen  $A$  und  $R$  für  $b = 3/40$ ,  $r = 1/40$ ,  $d = 1/10$ .
- Was sind die zugehörigen Eigenwerte und welche Bedeutungen haben sie?
- Welche Ergebnisse ergeben sich für  $b = 1.3/40$ ,  $r = 1/35$ ,  $d = 1/25$ ?