Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 20.10.2023

1. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 1:

(a) Es ergeben sich

(i) $\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{49}{20}$,

(ii) $\sum_{k=1}^{7} (k^2 - 1) = (1^2 - 1) + (2^2 - 1) + (3^2 - 1) + \cdots + (7^2 - 1) = 0 + 3 + 8 + \cdots + 48 = 133$

(iii) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7} (-1)^k k &= (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + \cdots + (-1)^7 \cdot 7 \\ &= -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 = -4,\end{aligned}$$

(iv) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} ij = \sum_{i=1}^{3} i \cdot 1 + i \cdot 2 = \sum_{i=1}^{3} i \cdot 3 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 3 + 6 + 9 = 18.$

(b) Es ergeben sich

(i) $3 + 7 + 11 + \cdots + 31 = \sum_{k=0}^{7} 4k + 3$,

(ii) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^7 = \sum_{k=0}^{7} 2^k$,

(iii) $4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + \cdots + 28 \cdot 30 = \sum_{k=4}^{28} k \cdot (k + 2)$,

(iv) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^9}{9!} = \sum_{k=0}^{9} \frac{x^k}{k!}$.

(c) Es ergeben sich

(i) $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$ ist falsch, Wurzel ziehen und Additon dürfen nicht vertauscht werden ein Gegenbeispiel ist etwa $\sqrt{4+4} = \sqrt{8} \neq \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$,

(ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist falsch, denn links verändert sich der Nenner in jedem Summanden, während rechts der Nenner immer gleich ist
ein Gegenbeispiel ist etwa $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \neq \frac{1}{3} \cdot (1 + 1 + 1) = 1$,

(iii) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} i \cdot j = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \sum_{j=1}^{N} j$ ist richtig, hier wurde einfach ausgeklammert.

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 2:
Es ergeben sich

(i) $\dfrac{n!}{(n-k)!} = k!$ ist falsch

ein einfaches Gegenbeispiel ist $n = 3,\ k = 2:\ \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{6}{1} = 6 \neq 2! = 2,$

(ii) $\prod_{k=1}^{n} 2k = 2\prod_{k=1}^{n} k,$ ist ebenfalls falsch, denn für $n \geq 2$ gilt $\prod_{k=1}^{n} 2k = 2^n \prod_{k=1}^{n} k \neq 2\prod_{k=1}^{n} k,$

(iii) $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \prod_{\ell=n-k+1}^{n} \ell$ ist richtig, Umformung ergibt

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)s = \prod_{\ell=n-k+1}^{n} \ell.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 3:
Es ergeben sich

(a)

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} \quad \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3,$$

(b) eine Lösung ist $x_1 = 1$ (probieren) und Polynomdivision führt auf

$$x^3 + x^2 - 37x + 35 = (x-1)(x^2 + 2x - 35) = 0$$
$$x^2 + 2x - 35 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+35} \quad \Rightarrow x_2 = 5,\ x_3 = -7,$$

(c) $2.1 = 1.075^x$

$$\log(2.1) = \log(1.075^x)$$
$$\log(2.1) = x\log(1.075$$
$$\frac{\log(2.1)}{\log(1.075)} = x$$
$$10.26 \approx x$$

(d) $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2-5}$

$$x^2 - 5 = x + 1$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{0.25 + 6} = 0.5 \pm 2.5$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = -2,$$

(e) $\ln(x^2+3) = 2\ln(2)$

$$\ln(x^2+3) = \ln(2) + \ln(2)$$
$$\ln(x^2+3) = \ln(2+2) = \ln(4)$$
$$x^2 + 3 = 4$$
$$x_{1,2} = \pm 1.$$