Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 27.10.2023

2. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften"

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 4:

(a) Die mathematischen Symbol-Schreibweisen sind

- (i) $\sqrt{x} \geq 0 \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$,
- (ii) $\exists! x \in \mathbb{R}:\ \exp(x) = 1$ (nämlich $x = 0$),
- (iii) $\ln(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}, x > 1$.

(b) Wahr sind die Aussagen (i) - klar und (iv), denn $y = -x$ tut's. Falsch sind (ii), denn $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und (iii), denn beispielsweise $x = -2$ ergibt $x^3 = -8 \ngeq 0$.

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 5:

Wenn K_0 der aktuelle Verbrauch ist, so ist der Verbrauch n Jahre später

$$K_n = 0.96 K_{n-1} = 0.96^2 K_{n-2} = \ldots = 0.96^n K_0.$$

Die Frage, wann sich der Verbrauch auf 30% reduziert hat, also $0.3K_0$ erreicht ist, führt auf

$$0.96^n K_0 = 0.3 K_0.$$

Rauskürzen von K_0 und einfache Umformungen ergeben

$$\begin{aligned}
&0.96^n = 0.3\\
&\log(0.96^n) = \log(0.3)\\
&n \log(0.96) = \log(0.3)\\
&n = \frac{\log(0.3)}{\log(0.96)}\\
&n \approx 29.49.
\end{aligned}$$

Nach 30 Jahren hat sich der Papierverbrauch auf 30% reduziert.

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 6:
Bestimmen Sie, falls möglich, für die angegebenen Folgen die Grenzwerte für $n \to \infty$

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1-3n} \cdot \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{n}-3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3},$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n+4}{-5n^2-4n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}{-5-\frac{4}{n}-\frac{4}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} -5-\frac{4}{n}-\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{-5} = -0.4,$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n+n\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n+n\sqrt{n}} - \frac{2n\sqrt{n}+n^2}{2n+n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1-2n\sqrt{n}-n^2}{2n+n\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1-2n\sqrt{n}}{2n+n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^{1.5}}-2}{\frac{2n}{n^{1.5}}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^{1.5}}-2}{\frac{2}{\sqrt{n}}+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n^{1.5}}-2}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}+1}$$
$$= \frac{-2}{1} = -2,$$

(d) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x) \qquad \text{siehe Vorlesung.}$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe 1:
Diese Aufgabe ist als eine Zusatzaufgabe für Studentinnen und Studenten gedacht, die Interesse an weiterführenden mathematischen Gedankengängen haben. Der Inhalt der Aufgabe ist für die Klausur nicht relevant.

Der Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, also dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, wird mittels eines sogenannten Widerspruchsbeweises (lateinisch: reductio ad absurdum) geführt. Dazu wird zunächst angenommen, $\sqrt{2}$ sei rational und dies durch Umformungen zu einem Widerspruch geführt, sodass sich die Annahme als falsch herausstellt.

Sei angenommen, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist. Das heißt, es gäbe $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, wobei m und n teilerfremd sind. (Der Bruch ist also nicht weiter kürzbar.) Nun würde gelten

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Rightarrow \quad 2n^2 = m^2.$$

Da $2n^2$ gerade ist, ist es m^2 ebenfalls. Damit ist aber auch m gerade (nur „ungerade“·„ungerade“ ergibt „ungerade“). Es ließe sich also m schreiben als

$$m = 2r$$

mit $r \in \mathbb{Z}$. Weiter gälte dann

$$2n^2 = m^2 = (2r)^2 = 4r^2$$

oder

$$n^2 = 2r^2.$$

Mit derselben Argumentationskette wie oben sind ebenfalls n^2 und n gerade. Also wäre n darstellbar als $n = 2p$ mit $p \in \mathbb{Z}$. Damit wären aber $n = 2p$ und $m = 2r$ nicht teilerfremd, da beide Vielfache von 2, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Damit muss die Annahme vom Beginn falsch sein und $\sqrt{2}$ kann nicht rational sein. Es gilt also $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.