

3. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 7:

Wir betrachten die Rekursion  $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$ . Der geometrische Ansatz  $a_n = z^n$  führt auf (Einsetzen von  $a_n = z^n$  in die Rekursionsvorschrift)

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1} &= 0 \\z^{n+1} - z^n - 2z^{n-1} &= 0 \\z^{n-1}(z^2 - z - 2) &= 0.\end{aligned}$$

Somit ist  $z^2 - z - 2 = 0$  die charakteristische Gleichung. Deren Lösungen sind

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}, \quad z_1 = 2, \quad z_2 = -1.$$

Unabhängig von den Anfangsgliedern ist die explizite Bildungsvorschrift somit von der Form

$$a_n = c \cdot 2^n + d \cdot (-1)^n.$$

Die Wahl  $a_0 = 1$  und  $a_1 = 1$  führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}a_0 = 1 &= c \cdot 2^0 + d \cdot (-1)^0 &\Rightarrow & c + d = 1, \\a_1 = 1 &= c \cdot 2^1 + d \cdot (-1)^1 &\Rightarrow & 2c - d = 1.\end{aligned}$$

Addition beider Gleichungen ergibt

$$3c = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{3}.$$

Die explizite Bildungsvorschrift lautet

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$$

und es ist  $a_{50} = 750\,599\,937\,895\,083$ .

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 8:

Sei  $a_n$  das Kapital im  $n$ -ten Intervall. Als Zugewinne für das nächste Intervall ergeben sich ein Ertrag von 3% für das aktuelle Kapital, also  $0.03 \cdot a_n$ , sowie ein Ertrag von 5% auf das Kapital vom vorangegangenen Jahr, also  $0.05 \cdot a_{n-1}$

Das neue Kapital ist

$$a_{n+1} = a_n + 0.03 \cdot a_n + 0.05 \cdot a_{n-1} = 1.03a_n + 0.05a_{n-1}.$$

Dies ist die rekursive Bildungsvorschrift. Daraus ergeben sich folgende Glieder

$$\begin{aligned}a_0 &= 10\,000 \\a_1 &= 1.03a_0 = 10\,300 && \text{(hier gibt's den 2. Bonus noch nicht),} \\a_2 &= 1.03a_1 + 0.05a_0 = 10\,609 + 500 = 11\,109, \\a_3 &= 1.03a_2 + 0.05a_1 = 11\,442 + 515 = 11\,957, \\a_4 &= 1.03a_3 + 0.05a_2 = 12\,316 + 555 = 12\,871, \\a_5 &= 1.03a_4 + 0.05a_3 = 13\,257 + 598 = 13\,855.\end{aligned}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 9:  
Die Rekursionsvorschrift lautet

$$a_{n+1} = \underbrace{a_n}_{\substack{\text{werden weiter} \\ \text{überwacht}}} + \underbrace{0.01a_n}_{\substack{1\% \text{ Neuverd.} \\ \text{durch Infos}}} - \underbrace{0.005a_{n-1}}_{\substack{0.5\% \text{ der Überw. von} \\ \text{vor 2 Wochen fallen weg}}} + \underbrace{100}_{\substack{\text{zusätzliche} \\ \text{Neuverdächtigungen}}}$$

und für die rekursiv definierte Folge ergeben sich

$$a_0 = 10\,000,$$

$$a_1 = 10\,200$$

$$a_2 = 10\,200 + 0.01 \cdot 10\,200 - 0.005 \cdot 10\,000 + 100 = 10\,352,$$

$$a_3 = 10\,352 + 0.01 \cdot 10\,352 - 0.005 \cdot 10\,200 + 100 = 10\,505,$$

$$a_4 = 10\,505 + 0.01 \cdot 10\,505 - 0.005 \cdot 10\,352 + 100 = 10\,658.$$