

4. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 10:

Allgemein konvergiert eine geometrische Reihe  $s_n = a_0 \sum_{i=0}^n q^i$  genau dann, wenn  $|q| < 1$ . Der Grenzwert ist  $a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$ . Für die Folgen ist zu analysieren, ob  $|q| < 1$  gilt und ggf. der Grenzwert zu bestimmen.

$$(a) \quad \sum_{i=0}^n 0.1^i \Rightarrow q = 0.1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} 0.1^i = \frac{1}{1-0.1} = \frac{1}{0.9} = 1.111,$$

$$(b) \quad \sum_{i=0}^n 1.5^i \Rightarrow q = 1.5 \Rightarrow \text{die Reihe divergiert.}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 11:

Siehe Aufgabe 11:

$$(a) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3,$$

$$(b) \quad \sum_{i=10}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^i - \sum_{i=0}^9 \left(\frac{2}{3}\right)^i = 3 - \frac{1 - (2/3)^{10}}{\frac{1}{3}} = 3 \cdot (2/3)^{10} = \frac{2^9}{3^{10}} = 0.052025,$$

$$(c) \quad \sum_{i=0}^{\infty} 1.5^i = \infty,$$

$$(d) \quad \sum_{i=0}^{\infty} (-0.7)^i = \frac{1}{1+0.7} = 0.5882,$$

alternative Lösung für (d) durch Aufteilen der Summe in negativen und positiven Anteil

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (-0.7)^i &= 1 - \underbrace{0.7}_{0.7 \cdot 1} + \underbrace{0.7^2}_{0.49} - \underbrace{0.7^3}_{0.7 \cdot 0.49} + \underbrace{0.7^4}_{0.49^2} - \underbrace{0.7^5}_{0.7 \cdot 0.49^2} \pm \dots \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} 0.49^i \right) - 0.7 \left( \sum_{i=0}^{\infty} 0.49^i \right) = 0.3 \sum_{i=0}^{\infty} 0.49^i = \frac{0.3}{0.51} = 0.5882. \end{aligned}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 12:

(a) Induktionsanfang:

$$n = 1 : \quad \sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1 = 1^2 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt ( $n \rightarrow n + 1$ ):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) &= \left( \sum_{k=1}^n (2k - 1) \right) + 2(n + 1) - 1 \\ &= n^2 + 2(n + 1) - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \quad \checkmark\end{aligned}$$

(b) Induktionsanfang:

$$n = 1 : \quad 1^2 + 1 = 2 \quad \text{ist gerade} \quad \checkmark$$

Induktionsschritt ( $n \rightarrow n + 1$ ):

$$(n + 1)^2 + (n + 1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = \underbrace{(n^2 + n)}_{\text{gerade}} + \underbrace{2(n + 1)}_{\text{gerade}} \quad \checkmark$$

(der erste Summand ist dabei nach Induktionsvoraussetzung (für  $n$ ) gerade).

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 13:

Gegeben für (a):

$$K_0 = -500\,000, \quad E = 3\,000, \quad K_n = 0, \quad p = 0.0015.$$

Lösung für (a):

$$\begin{aligned}n &= \frac{\ln |pK_n + E| - \ln |pK_0 + E|}{\ln(1 + p)} \\ &= \frac{\ln |0.0015 \cdot 0 + 3\,000| - \ln |0.0015 \cdot (-500\,000) + 3\,000|}{\ln(1.0015)} \\ &= 191.93, \\ GE &= 191.93 \cdot 1\,200 = 575\,790.\end{aligned}$$

Gegeben für (b):

$$K_0 = -500\,000, \quad n = 12 \cdot 12 = 144, \quad K_n = 0, \quad p = 0.0022.$$

Lösung für (b):

$$\begin{aligned}E &= \frac{p(K_n - K_0(1 + p)^n)}{(1 + p)^n - 1} \\ &= \frac{0.0022 \cdot (0 + 500\,000 \cdot 1.0022^{144})}{1.0022^{144} - 1} \\ &= 4\,055.00 \\ GE &= 144 \cdot 4\,055.00 = 583\,920.\end{aligned}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 14:

(a) Gegeben:  $K_0 = 500\,000$ ,  $K_n = 0$ ,  $p = 0.005$ ,  $n = 240$ .

$$E = \frac{p(K_n - K_0(1 + p)^n)}{(1 + p)^n - 1} = \frac{0.005 \cdot (0 - 500\,000 \cdot 1.005^{240})}{1.005^{240} - 1} = -3582.2.$$

- (b) Gegeben:  $K_0 = -500\,000$ ,  $K_n = 0$ ,  $p = 0.0005$ ,  $E = 3\,000$ .  
(Wegen  $E > 0$  ist  $K_0 < 0$  zu wählen, andernfalls geht auch  $E = -3\,000$  und  $K_0 = 500\,000$ )

$$n = \frac{\ln |pK_n + E| - \ln |pK_0 + E|}{\ln(1+p)} = \frac{\ln |0.0005 \cdot 0 + 3\,000| - \ln |0.0005 \cdot (-500\,000) + 3\,000|}{\ln(1.0005)}$$
$$= 174.07.$$