

6. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 19:

Mittels der Regel von L'Hospital ergeben sich

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\cos(x)} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan(x)^2}{1} = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{mit } (\tan(x))' = 1 + \tan(x)^2),$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) - e^x}{1} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \ln(x) + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{x \ln(x) + 1}{x} \quad \left| \text{hier nun l'Hospital, denn } \frac{0 \cdot (-\infty)}{0} \text{ wird nix} \right.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{\ln(x) + 1}{1} = -\infty.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 20:

(a) Ableitung von $N(p)$ und Elastizität $\eta(p)$ sind

$$N'(p) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad \eta(p) = p \cdot \frac{N'(p)}{N(p)} = \frac{-\frac{1}{2} \frac{p}{\sqrt{p}}}{10 - \sqrt{p}} = -\frac{\sqrt{p}}{20 - 2\sqrt{p}}.$$

Offensichtlich ist $\eta(p) \leq 0$ für alle $p \in (0, 100)$, also

$$|\eta(p)| = \frac{\sqrt{p}}{20 - 2\sqrt{p}}.$$

Um den Bereich zu bestimmen, wo $N(p)$ preiselastisch ist, lösen wir zunächst

$$|\eta(p)| = \frac{\sqrt{p}}{20 - 2\sqrt{p}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{p} = 20 - 2\sqrt{p} \quad \Leftrightarrow \quad 3\sqrt{p} = 20 \quad \Leftrightarrow \quad p = \pm \left(\frac{20}{3}\right)^2.$$

Nur der positive Wert liegt im zu untersuchenden Intervall. Der Umschlag zwischen preiselastisch zu preisunelastisch erfolgt also bei $p \approx 44.44$. Bleibt noch zu bestimmen, welche Seite preiselastisch ist: die einfachen Auswertungen

$$|\eta(36)| = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} < 1, \quad |\eta(49)| = \frac{7}{6} > 1$$

ergeben, dass $N(p)$ für $p \in (44.44, 100)$ preiselastisch ist.

(b) Ableitung von $N(p)$ und Elastizität $\eta(p)$ sind

$$N'(p) = -3 + 0.0024p, \quad \eta = \frac{-3p + 0.0024p^2}{1200 - 3p + 0.0012p^2}.$$

Offensichtlich sind $-3p + 0.0024p^2 \leq 0$ und $1200 - 3p + 0.0012p^2 \geq 0$ für $p \in (0, 500)$, so dass

$$|\eta(p)| = \frac{3p - 0.0024p^2}{1200 - 3p + 0.0012p^2}.$$

Um den Bereich zu bestimmen, wo $N(p)$ preiselastisch ist, lösen wir zunächst

$$\begin{aligned} \frac{3p - 0.0024p^2}{1200 - 3p + 0.0012p^2} = 1 &\Leftrightarrow 3p - 0.0024p^2 = 1200 - 3p + 0.0012p^2 \\ &\Leftrightarrow 0.0036p^2 - 6p + 1200 = 0. \end{aligned}$$

Umformung und Anwendung der p - q -Formel führen auf

$$p^2 - \frac{6}{0.0036}p + \frac{1200}{0.0036} = 0 \Leftrightarrow p_{1,2} = \frac{3}{0.0036} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{0.0036}\right)^2 - 1200}$$

und also $p_1 = 1434.3$ (entfällt) und $p_2 = 232.4$. Einfache Auswertungen

$$|\eta(200)| = 0.778, \quad |\eta(250)| = 1.14$$

ergeben, dass $N(p)$ für $p \in (232.4, 500)$ preiselastisch ist.

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 21:

(a) Gebraucht werden

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3, \quad f''(x) = 2x - 2.$$

Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$$

Jeweils in die zweite Ableitung einsetzen:

$$f''(3) = 4 > 0, \quad f''(-1) = -4 < 0.$$

Somit sind $(3, -9)$ ein Minimum und $(-1, 5/3)$ ein Maximum.

(b) Hier ist zunächst der Definitionsbereich zu beachten, $DB = [0, \infty)$. Erste Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x} - x^{\frac{1}{2}}e^{-x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}e^{-x} - x^{-\frac{1}{2}}e^{-x} + x^{\frac{1}{2}}e^{-x}.$$

Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

$$\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

In die zweite Ableitung einsetzen: $f''(0.5) \approx -0.86 < 0$. Somit ist $(0.5, 0.429)$ ein Maximum.

Weiter ist aber auch der linke Rand des DB zu untersuchen. Hier gilt, dass bei $x_2 = 0$ ein Minimum vorliegt, also ist zudem $(0, 0)$ ein Minimum.

- (c) Hier ist zunächst der Definitionsbereich zu beachten, denn unterm Logarithmus muss was Positives stehen. Also ist $DB = (-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$. Erste Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 1}, \quad f''(x) = \frac{-2x^2 - 4x - 6}{(x^2 + 2x - 1)^2}$$

Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

$$\frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 1} = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Jedoch liegt $x = -1$ nicht im Definitionsbereich. Weiter sind

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow -1 - \sqrt{2}, x < -1 - \sqrt{2}} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1 + \sqrt{2}, x > -1 + \sqrt{2}} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \infty \end{aligned}$$

Also hat $f(x)$ keine Extrema in \mathbb{R} .

- (d) Erste Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}(n-x)e^{-x}, \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2}e^{-x} - 2nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} = x^{n-2}(n^2 - n - 2nx + x^2)e^{-x}. \end{aligned}$$

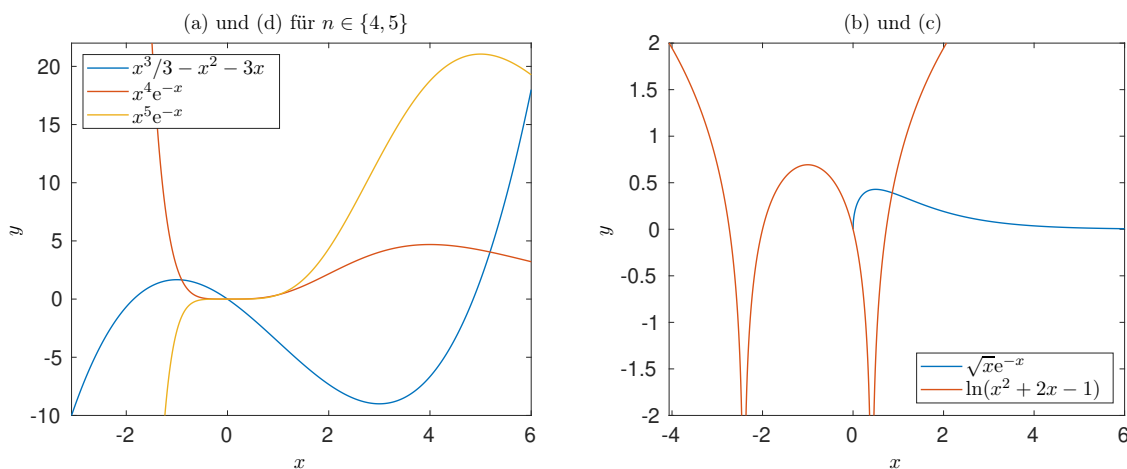
Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

$$(n-x)x^{n-1}e^{-x} = 0, \quad x_1 = n, \quad x_2 = 0,$$

wobei x_2 eine $(n-1)$ -fache Nullstelle ist. In die zweite Ableitung einsetzen:

$$f''(n) = n^{n-2}(n^2 - n - 2n^2 + n^2)e^{-n} = n^{n-2}(-n)e^{-n} < 0, \quad f''(0) = 0.$$

Somit ist zunächst $(n, n^n e^{-n})$ ein Maximum. Die Analysen der weiteren Ableitungen zeigen, dass die n -te Ableitung von $f(x)$ die erste von null verschiedene an der Stelle $x = 0$ ist. Somit ist $(0, 0)$ ein Sattelpunkt, falls n ungerade ist und ein Minimum, falls n gerade ist.



Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 22:

Zu $f(x) = \ln(x)$ sind

$$f'(x) = x^{-1}, \quad f''(x) = -x^{-2}, \quad f'''(x) = 2x^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}, \quad f^{(5)}(x) = 24x^{-5}$$

mit

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2, \quad f^{(4)}(1) = -6, \quad f^{(5)}(1) = 24.$$

Damit ist das Taylorpolynom

$$\begin{aligned} T(f, 1, 5)(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5, \\ &= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \frac{24}{5!}(x-1)^5, \\ &= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 \end{aligned}$$

oder in anderer Form

$$\begin{aligned} f(1+h) &= f(1) + f'(1)h + \frac{f''(1)}{2!}h^2 + \frac{f'''(1)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}h^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}h^5 \\ &= 0 + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 23:

Gesucht ist p^* , sodass $N(p^*) = A(p^*)$ gilt. Eine mögliche Nullstellenform lautet

$$f(p) = N(p) - A(p) = 10 - \sqrt{p} - (-2 + \exp(p/10)).$$

1. Bisektionsverfahren, Startintervall $[15, 25]$:

Iter.	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
1	15	25	20	3.65	0.139	-5.18
2	20	25	22.5	0.139	-5.18	-2.23

Die Nullstelle liegt also im Intervall $[20, 22.5]$.

2. Die Iteration lautet

$$p_{i+1} = p_i - \frac{10 - \sqrt{p} + 2 - \exp(p/10)}{-\frac{1}{2\sqrt{p}} - \frac{1}{10} \exp(p/10)}$$

und zum Startwert $p_0 = 20$ ergeben sich

$$p_0 = 20, \quad p_1 = 20.163, \quad p_2 = 20.162.$$