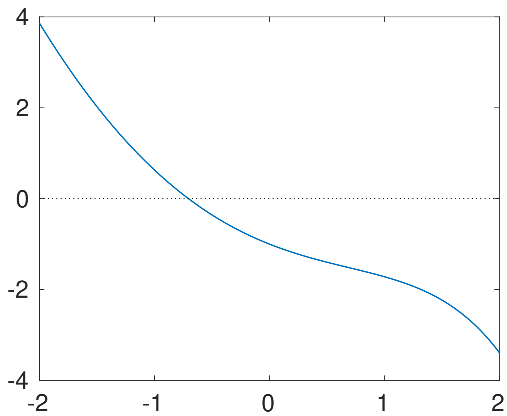
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 28.11.2023

7. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 24:

Zunächst wird die Gleichung zu $f(x) = x^2 - \exp(x)$ umgeformt. Eine grafische Darstellung lässt die Nullstelle im Intervall $[-1,\ 0]$ vermuten.



Die Iterationen sind

Iter.	a	b	$f(a)$	$f(b)$	c	$f(c)$	neu	Intervallbreite
1	-1.0000	0.0000	0.6321	-1.0000	-0.5000	-0.3565	b	0.5000
2	-1.0000	-0.5000	0.6321	-0.3565	-0.7500	0.0901	a	0.2500
3	-0.7500	-0.5000	0.0901	-0.3565	-0.6250	-0.1446	b	0.1250
4	-0.7500	-0.6250	0.0901	-0.1446	-0.6875	-0.0302	b	0.0625
5	-0.7500	-0.6875	0.0901	-0.0302	-0.7188	0.0292	a	0.0312

Das Newton-Verfahren zu $x_0 = -1$ ergibt

i	x_i
0	-1.0
1	-0.733043605245445
2	-0.703807786324133
3	-0.703467468331798
4	-0.7034674224983992

Das Startintervall des Bisektionsverfahrens ist hier $[-1, 0]$ und hat die Breite $b^{(0)} = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} b^{(n)} &= \frac{1}{2} b^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{2^n} b^{(0)}. \end{aligned}$$

Soll nun $b^{(n)} < \varepsilon$ gelten, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n} \cdot 1 < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(\frac{1}{\varepsilon}) < n \ln(2) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(2)} < n \\
&n > 19.93.
\end{aligned}$$

Also sind 20 Schritte erforderlich.

<u>Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 25:</u>

(a) $f_x = 1 - 2y, \quad f_y = -2x - 2y,$
$\quad f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = -2, \quad f_{yy} = -2,$

(b) $f_x = \dfrac{3}{y}, \quad f_y = -3\dfrac{x}{y^2},$
$\quad f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = -\dfrac{3}{y^2}, \quad f_{yy} = \dfrac{6x}{y^3},$

(c) $f_x = 2(x-2)(y+1)^2, \quad f_y = 2(x-2)^2(y+1),$

(d) $f_x = \dfrac{3}{2}\sqrt{xy}, \quad f_y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^3}{y}},$
$\quad f_{xx} = \dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{y}{x}}, \quad f_{xy} = \dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{x}{y}}, \quad f_{yy} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{x^3}{y^3}} = -\dfrac{x\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}},$

(e) $f_x = y\cos(xy) - z\sin(xz), \quad f_y = x\cos(xy), \quad f_z = -x\sin(xz)$

(f) $f_x = yz + \dfrac{1}{x+y+z}, \quad f_y = xz + \dfrac{1}{x+y+z}, \quad f_z = xy + \dfrac{1}{x+y+z}.$

Für die Richtungsableitungen ergeben sich mit $v_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(a) $v_1 f_x + v_2 f_y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}(1-2y) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x-2y) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}(1-2\cdot 1) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2\cdot 3 - 2\cdot 1) = -4.4721,$

(d) $v_1 f_x + v_2 f_y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{3}{2}\sqrt{xy} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^3}{y}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{3}{2}\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{27}{1}} = 3.4857$

<u>Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 26:</u>

(a) Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x = 2x + y - 1, \quad f_y = x + 2y.$$

Nullsetzen der Ableitungen führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
2x + y &= 1, \\
x + 2y &= 0,
\end{aligned}$$

dessen Lösung $(x, y) = (2/3, -1/3)$ ist. Der kritische Punkte ist $(2/3, -1/3, -1/3)$.

(b) Partielle Ableitungen:

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

Nullsetzen der Ableitungen führt auf

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+1}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \\ \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+1}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0. \end{aligned}$$

Somit ist $(0, 0, 1)$ der kritische Punkt.

(c) Partielle Ableitungen:

$$f_x = -2xy^2 - 4x - 3, \quad f_y = -2x^2y.$$

Wegen $f_y = 0$ muss entweder $x = 0$ oder $y = 0$ gelten. Für $x = 0$ ist $f_x = -3 \neq 0$ und es kann sich keine kritische Stelle ergeben. Die Wahl $y = 0$ führt auf $-4x = 3$ uns somit $x = -3/4$. Der kritische Punkt ist $(-0.75, 0, 1.125)$.