Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 05.12.2023

8. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 27:

1. Die Lagrange-Funktion ist
$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y + 2xy + \lambda(x + y - 6).$$
Die parteillen Ableitungen sind
$$L_x = 2x + 2y + \lambda, \quad L_y = -1 + 2x + \lambda, \quad L_\lambda = x + y - 6$$
und das zu lösende Gleichungssystem ist
$$\begin{aligned} 2x + 2y + \lambda &= 0 \\ 2x + \lambda &= 1 \\ x + y &= 6. \end{aligned}$$
Dessen Lösung ist $(x, y, \lambda) = (6.5, -0.5, -1.2)$ und die kritische Stelle lautet $(6.5, -0.5)$.

2. Lagrange-Funktion:
$$L(x, y, \lambda) = x^2 - 20x + 130 + y^2 - 10y + \lambda(2x + 3y - 22).$$
Partielle Ableitungen:
$$L_x = 2x - 20 + 2\lambda, \quad L_y = 2y - 10 + 3\lambda, \quad L_\lambda = 2x + 3y - 22.$$
Zu lösendes Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda &= 20 \\ 2y + 3\lambda &= 10 \\ 2x + 3y &= 22. \end{aligned}$$
Lösung: $(x, y, \lambda) = (8, 2, 2)$. Kritische Stelle: $(8, 2)$.

3. Vorüberlegung: Die Nebenbedingung $(x^2 + y^2 - 1)^2 = 0$ kann durch die Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ersetz werden. Die Lagrange-Funktion lautet dann:
$$L(x, y, \lambda) = x + 2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$
Partielle Ableitungen:
$$L_x = 1 + 2\lambda x, \quad L_y = 2\lambda y, \quad L_\lambda = x^2 + y^2 - 1.$$
Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} 2x\lambda &= -1, \\ 2y\lambda &= 0, \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$
Wegen Gleichung I ist $\lambda \neq 0$ und wegen II muss damit $y = 0$ sein. Die Lösungen sind $x_{1,2} = \pm 1$ und die kritischen Punkte sind $(x_1, y_1) = (1, 0)$ sowie $(x_2, y_2) = (-1, 0)$. (Anmerkung: bei $(1, 0)$ ist ein Maximum, bei $(-1, 0)$ ist ein Minimum.)

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 28:
Die zu minimierende Funktion lautet (Manteloberfläche eines Zylinders)

$$f(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Zu beachten ist die Nebenbedingung (Volumen eines Zylinders)

$$\pi r^2 h = 5000 \quad \Rightarrow \quad \pi r^2 h - 5000 = 0.$$

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(r,h,\lambda) = 2\pi rh + 2\pi r^2 - \lambda(r^2 h - 5000)$$

und deren partielle Ableitungen sind

$$\begin{aligned} L_r &= 2\pi h + 4\pi r + 2\pi rh\lambda, \\ L_h &= 2\pi r + \lambda\pi r^2, \\ L_\lambda &= \pi r^2 h - 5000. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der kritischen Stelle(n):

$$\begin{aligned} 0 &= L_h = 2\pi r + \lambda\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda r = -2, \\ 0 &= L_r = 2\pi h + 4\pi r + 2\pi rh\lambda = h + 2r - 2h \quad \Rightarrow \quad h = 2r, \\ 0 &= L_\lambda = \pi r^2 h - 5000 = 2\pi r^3 - 5000 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{2500}{\pi}} \approx 9.77\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Die Höhe ist $h = 2r = 18.53\,\mathrm{m}$.

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 29:
Formal lautet die Nebenbedingung $100 \geq 0.2x_P + 0.1x_C$. Da maximaler Gewinn gefragt ist und alle Anteile als positive Werte in die Zielfunktion einfließen, können wir direkt $g(x_P, x_C) = 100 - 0.2x_P - 0.1x_C$ ansetzen.

Die Lagrange-Funktion ist

$$L(x_P, x_C, \lambda) = 50x_P + 20x_C + 1000x_P x_C + \lambda(100 - 0.2x_P - 0.1x_C).$$

Partielle Ableitungen:

$$L_{x_P} = 50 + 1000x_C - 0.2\lambda, \quad L_{x_C} = 20 + 1000x_P - 0.1\lambda, \quad L_\lambda = 100 - 0.2x_P - 0.1x_C.$$

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1000x_C - 0.2\lambda &= -50, \\ 1000x_P - 0.1\lambda &= -20, \\ -0.2x_P - 0.1x_C &= -100. \end{aligned}$$

Lösung führt auf die kritische Stelle bei $(x_P, x_C) = (250, 500)$ und sein Gewinn ist 125 022 500\$.