

9. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 30:

Die Ergebnisse sind

- (i)  $\int \frac{1}{5}x^4 + 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \, dx = \frac{1}{25}x^5 + x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C,$
- (ii)  $\int \sqrt{x+1} \, dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C,$
- (iii)  $\int_1^8 \sqrt[3]{x} \, dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \Big|_1^8 = \frac{3}{4}(8^{4/3} - 1) = \frac{45}{4},$
- (iv)  $\int \ln(ax+b) \, dx = \frac{ax+b}{a} \ln(ax+b) - \frac{ax+b}{a} + C,$
- (v)  $\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{\ln(ax+b)}{a} + C,$
- (vi)  $\int_1^2 \frac{(x+2)(x+1)}{x} \, dx = \int_1^2 x + 3 + \frac{2}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 2 \ln(x) \Big|_1^2 \approx 5.886.$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 31:

Die Ergebnisse sind

- (i) Substitution  $z = -cx^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2cx \Rightarrow -\frac{1}{2c} dz = x \, dx$   
 $\Rightarrow \int x \exp(-cx^2) \, dx = \int -\frac{1}{2c} \exp(z) \, dz = -\frac{1}{2c} \exp(z) = -\frac{1}{2c} \exp(-cx^2)$
- (ii) Substitution  $z = \ln(x+2) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+2} \Rightarrow dz = \frac{dx}{x+2}$   
 $\Rightarrow \int \frac{\ln(x+2)}{2x+4} \, dx = \int \frac{z}{2} \, dz = \frac{z^2}{4} + C = \frac{(\ln(x+2))^2}{4} + C,$
- (iii) Substitution  $z = \ln(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dz = \frac{1}{x} \, dx$   
 $\Rightarrow \int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x} \, dx = \int_{z(1)}^{z(e)} 1 + z \, dz = z + \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 = 1.5.$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 32:

Die Ergebnisse sind

- (i) Wahl  $u = \ln(x)$  und  $v' = \sqrt{x}$  mit  $u' = \frac{1}{x}$  und  $v = \frac{2}{3}x^{1.5}$  ergibt

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \ln(x) \, dx &= \frac{2}{3}x^{1.5} \ln(x) - \int \frac{2}{3} \frac{x^{1.5}}{x} \, dx = \frac{2}{3}x^{1.5} \ln(x) - \int \frac{2}{3}x^{0.5} \, dx \\ &= \frac{2}{3}x^{1.5} \ln(x) - \frac{4}{9}x^{1.5} + C. \end{aligned}$$

(ii) Wahl  $u = x^2$  und  $v' = \exp(x)$  mit  $u' = 2x$  und  $v = \exp(x)$  ergibt

$$\int_0^1 x^2 \exp(x) \, dx = x^2 \exp(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2x \exp(x) \, dx$$

erneute partielle Integration mit  $u = 2x$  und  $v' = \exp(x)$  sowie dann  $u' = 2$  und  $v = \exp(x)$  ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \exp(x) \, dx &= x^2 \exp(x) - 2x \exp(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 2 \exp(x) \, dx \\ &= x^2 \exp(x) - 2x \exp(x) + 2 \exp(x) \Big|_0^1 = e - 2. \end{aligned}$$

(iii) Wahl  $u = x$  und  $v' = \sqrt{1+x}$  mit  $u' = 1$  und  $v = (1+x)^{1.5}/1.5$  ergibt

$$\int_1^3 x \sqrt{1+x} \, dx = \frac{x(1+x)^{1.5}}{1.5} \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{(1+x)^{1.5}}{1.5} \, dx = \frac{x(1+x)^{1.5}}{1.5} - \frac{(1+x)^{2.5}}{3.75} \Big|_1^3 = 7.0895.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 33:

Der durchschnittliche Funktionswert lässt sich berechnen als

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = \frac{1}{4-1} \int_1^4 -\frac{2}{x^3} + \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{x^3}{9} \right) \Big|_1^4 \approx 2.021.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 34:

Für die Trapezregel ergeben sich die Näherungen

$$T_2 = 4 \left( \frac{1}{2} \cdot 0.058824 + 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.058824 \right) = 4.2353,$$

$$T_4 = 2 \left( \frac{1}{2} \cdot 0.058824 + 0.2 + 1 + 0.2 + \frac{1}{2} \cdot 0.058824 \right) = 2.9176,$$

$$T_8 = 1 \left( \frac{1}{2} \cdot 0.058824 + 0.1 + 0.2 + 0.5 + 1 + 0.5 + 0.2 + 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 0.058824 \right) = 2.6588$$

und die Fehlerwerte sind 1.5837, 0.26601 sowie  $7.1882 \cdot 10^{-3}$ .

Für die Simpsonregel lauten die Werte

$$S_2 = \frac{4}{3} (0.058824 + 4 \cdot 1 + 0.058824) = 5.4902,$$

$$S_4 = \frac{2}{3} (0.058824 + 4 \cdot 0.2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0.2 + 0.058824) = 2.4784,$$

$$S_8 = \frac{1}{3} (0.058824 + 0.4 + 0.4 + 2 + 2 + 2 + 0.4 + 0.4 + 0.058824) = 2.5725$$

und die Fehlerwerte sind 2.8386,  $-0.17320$  sowie  $-7.9086 \cdot 10^{-2}$ .