Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 15.01.2024

12. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften“

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 42:

Aus dem Text ergeben sich folgende Gleichungen. Er investiert 1 000 € mehr in die T-Aktien als in die drei anderen Investments zusammen:

$$x_T - x_G - x_R = 1000.$$

Wenn die Investments in Gold und Rentenfonds jeweils verdoppelt werden, so sollen es zusammen immer noch $\beta = 500$ € weniger sein, als in T-Aktien.:

$$x_T - 2x_G - 2x_R = 500.$$

Gold ist tendenziell out und soll nur 5% des Investments ausmachen:

$$x_G - 0.05(x_T + x_G + x_R) = 0.$$

Somit ergeben sich

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -0.05 & 0.95 & -0.05 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_T \\ x_G \\ x_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Eine LR-Zerlegung von A lautet

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -0.05 & -0.9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die neue Lösung (Nutzung der LR-Zerlegung hierfür) ist

$$Lu = b \quad \Rightarrow \quad u = \begin{pmatrix} 3\,000 \\ -2\,250 \\ -1\,875 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 5250 \\ 375 \\ 1875 \end{pmatrix}.$$

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 43:

(a) Wir erhalten einen Zusammenhang der Form

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 1 \\ 2.5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_X \\ x_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_U \\ x_V \end{pmatrix}.$$

(b) Für die Inverse von M ergibt sich

$$M^{-1} = \frac{1}{7.5 - 2.5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2.5 & 2.5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2.5 & 2.5 \end{pmatrix}.$$

(c) Nutzen lässt sich der Zusammenhang

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2.5 & 2.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_U \\ x_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_X \\ x_Y \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2.5 & 2.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ lässt sich auch ein Gleichungssystem lösen, so wird die Inverse aus (b) nicht gebraucht.

Musterlösung zur freiwilligen Übungsaufgabe 44:

(a) Für (i) ergibt sich in (erweiterter) Kurzschreibweise

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array},$$

sodass nur zwei nicht-null-Zeilen übrig bleiben, der Rang ist also 2. Für (ii) ergibt sich

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ & -3 & -6 & 0 \\ & -6 & -12 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ & -3 & -6 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}$$

und auch hier bleiben nur zwei nicht-null-Zeilen übrig, der Rang ist also ebenso 2.Für (iii) ist in (erweiterter) Kurzschreibweise

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & -6 & 1 & 2 & 0 \\ & -4 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & -6 & 1 & 2 & 0 \\ & & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0. \end{array}$$

Es bleiben drei nicht-null-Zeilen übrig, der Rang ist also 3.

(b) Jeweils ist zu klären, ob sich der Nullvektor nur als triviale Linearkombination (also alle Koeffizienten sind null) darstellen lässt oder auch anders. Für (i) ergibt sich aus

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & + & 2\beta & = & 0 \\ \alpha & & & = & 0 \end{array}$$

welches nur die Lösung $\beta = 0$, $\alpha = 0$ besitzt. Beide Vektoren sind also linear unabhängig.

Für (ii) ist

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine mögliche nichttriviale Lösung ist $\alpha = 1$, $\beta = -1$ und $\gamma = 1$. Die Vektoren sind also linear abhängig.

Für (iii) ist

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu untersuchen. Wegen der 1. Komponente ($\alpha = 0$) geht es nur mit $\alpha = 0$. Weiter ist dann wegen der 2. Komponente ($\alpha + 2\beta = 0$) auch $\beta = 0$. Letztlich ist wegen der 3. Komponente ($\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0$) dann auch $\gamma = 0$. Es gibt nur die triviale Lösung $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, somit sind die Vektoren linear unabhängig.

(c) Bei (i) sind es zwei unabhängige Vektoren. Der Raum $\mathbb{R}^2$ hat die Dimension 2 und wird somit von ihnen generiert. Bei (ii) sind es 3 Vektoren, die jedoch linear abhängig sind. Der $\mathbb{R}^3$ hat die Dimesion 3 und wird somit $(2 < 3)$ nicht von diesen generiert. Bei (iii) sind es 3 linear unabhängige Vektoren, der $\mathbb{R}^3$ hat Dimension 3 und wird somit von ihnen generiert.

(d) Die Mengen aus (i) und (iii) sind Basen des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$, die Menge aus (ii) ist keine Basis von $\mathbb{R}^3$.